

〔原著論文〕

# インピーダンス制御型マスタ・スレーブ・システム (II)

## —操作感の変更と操作能力の拡張—

榊 泰 輔\* 館 障\*\*

### Impedance Controlled Master Slave Manipulation System Part II : Modification of Force Sensation and Extension of Operation Capability

Taisuke SAKAKI Susumu TACHI

This research is concerned with master slave manipulation. A new master slave system in tele-existence mode, i. e., the basic part of impedance controlled master slave system, has been presented in the part I. In the part II, the system is expanded so that it controls both impedance models of the environment and the manipulators, and modifies the force sensation of the master and slave manipulators as if an operator were in the different physical environment, and the impedances of the master and slave manipulators are determined by using similarity transformation in physical modelling when the manipulators have different scales, force and/or velocity conditions. These methods are verified in the experiments with the two degrees of freedom direct drive manipulator.

**Key Words :** Impedance Control, Master Slave Manipulation, Tele-Existence, Similarity Transformation, Physical Modelling, Telerobotics

### 1. はじめに

遠く離れたところに存在する操作者がまるでロボットの作業している場所にいるかのような高度な臨場感を持ってロボットを遠隔操作する技術、いわゆるテレグジスタンス<sup>1)</sup>の研究を進めている。このテレグジスタンス技術のうち、遠隔に配置したロボットのアームが自分の腕になったかのような感覚を持って作業をおこなうといった高度な臨場感を伴う操作感の研究について、我々はマスタ・スレーブ方式に注目してきた。

従来のマスタ・スレーブには、まず対称型・力逆送型・力帰還型があるが、いずれの方法においてもアーム

の手先の動特性は固定されている<sup>2)</sup>。次いで、この動特性を制御することがマスタ・スレーブ・システムに有効であることが主張され、福田<sup>4)</sup>のインピーダンス対応型、古田・小菅<sup>5)</sup>の仮想内部モデル追従制御型、吉川・横小路<sup>6,7,8)</sup>や J. Dudragné ら<sup>18)</sup>の介在インピーダンス型、藤井<sup>9)</sup>や B. Hannaford<sup>17)</sup>のモデル規範型、などが提案されている。

しかし、これまで提案されてきた手法は、各マニピュレータの手先の動特性を固定しており作業内容や操作環境に応じて変化させる観点が無い。また、可変な動特性を積極的に活用して操作性を向上させる方法について触れられていない。テレグジスタンスでは、操作性の向上のために種々の作業環境あるいは作業内容に応じた柔軟なシステム構成が必要であり、各マニピュレータの動特性を直接制御して任意の動特性を設定可能とすること

原稿受付 1989年6月12日

\* (株)安川電機製作所

\*\* 機械技術研究所

が課題となる。さらに、これまで提案されていたシステムは、マスタ・スレーブ間の通信に多くの情報を必要とするため制御系が複雑になり、実際のシステムを構築するのが難しい。実用的なシステムを設計する観点から、マスタ・スレーブ間の通信量を少なくし制御系をできるだけ単純にかつ統一した方法で構成することが課題となる。以上の問題点を鑑み、我々は既にインピーダンス制御型マスタ・スレーブ・システムを提案している<sup>3)</sup>。

このインピーダンス制御型はマスタとスレーブのアームの手先の動特性を互いに等しくすることを特徴とし、この動特性を操作に支障が無い程度に小さくすると対象物の動特性をほぼ直接感じながら作業を行うことができる。しかし、この手法で全ての状況や操作者の能力に応じて能率よく作業を進めることができるとは言えない。

第1に、トレイグジスタンスではスレーブの得た感覚を直接マスタに返すだけではなく作業によっては操作者が操作し易いように補助することが重要である。例えば対象物の慣性や粘性が過大で操作者の疲労をもたらすような場合、見かけ上そのインピーダンスが低くなるように制御されることが望ましい。館・榊<sup>3)</sup>は環境をインピーダンスで表現して環境とアームをあわせたインピーダンスを制御する手法を提案しているが、このような方法により操作感を見かけ上変更し種々の臨場感を与えるマスタ・スレーブ・システムの制御法が求められている。

第2に、トレイグジスタンスでは、従来のように互いに同じ形状、同じ速度、同じ入出力条件のマスタ・スレーブアームを用いて対象物を操作する技術だけでなく、

形状や速度あるいは入出力条件といった物理的条件が異なる環境での臨場感の供与の方法が必要である。新井ら<sup>10)</sup>はマスタの操作性とスレーブの作業性を考慮した異構造のマスタ・スレーブを提案しているが、物理的に異なる環境で動作するマスタ・スレーブについては触れていない。福田<sup>4)</sup>はマイクロコンピュータの操作のように形状も入出力条件も異なる各アームの状態をインピーダンスで記述することが一般的であることを示し、館・榊<sup>3)</sup>は種々の臨場感を提供するために形状や入出力条件が異なるマスタ・スレーブ・システムをインピーダンスモデルで記述することの有効性を述べている。しかし、これらの方法はインピーダンスモデルを用いることの有効性を示してはいるが、マスタ・スレーブ・システム的设计手法については提案していない。

本論文は、既に提案しているインピーダンス制御型マスタ・スレーブ・システムを拡張し上記の問題点を解決する手法として、変更した操作感による臨場感及び等物理条件<sup>\*)</sup>でない場合に対応する臨場感の供与の方法について提案する。

以下の章では、第2章でインピーダンス制御型の基本システムを簡単に説明する。また、操作感の変更について及び等物理条件でない場合についての問題点を整理し、インピーダンス制御型マスタ・スレーブを拡張することで対応できることを示す。第3章では拡張されたシステ

<sup>\*)</sup> マスタアームとスレーブアームが同形状・同動作速度・同入出力条件で動作する場合、その条件を等物理条件と呼んでいる。

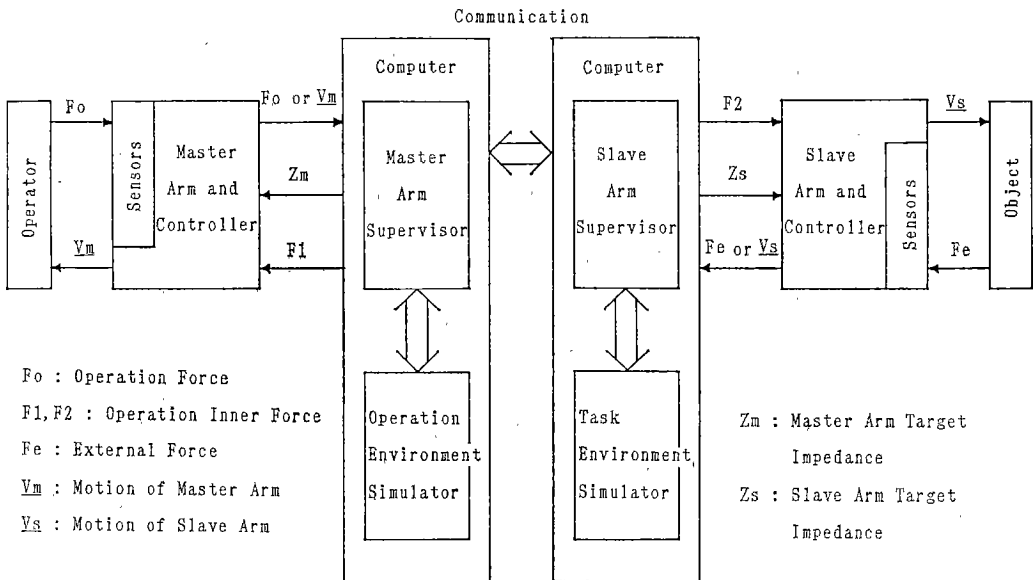


Fig. 1 Basic Concept of Impedance Controlled Master Slave System (MSS)

ムの実現法を詳しく説明する。第4章では基礎的実験による検証, 第5章でまとめと今後の課題について述べる。

## 2. インピーダンス制御型マスタ・スレーブの基本システムとその拡張

この章では, インピーダンス制御型マスタ・スレーブ・システムの基本部分を簡単に説明する。また, 操作感の変更及び等物理条件でない場合の問題点を整理し, インピーダンス制御型マスタ・スレーブ・システムの基本部分を拡張することで対応できることを示す。

### 2.1 基本システム

システムの概念は, アーム・環境の動特性を機械的インピーダンスのモデルで記述し, さらにこのモデルを操作者が作業しやすいように改変することにより高度の臨場的な操作感を与えようとするものである。これをインピーダンス制御型マスタ・スレーブ・システムと呼び, その基本的制御法としてインピーダンス制御を用いる。

インピーダンス制御は, ロボットと環境の動力学的相互作用を中心概念とする制御であり, 特に接触作業を行う際に安定的な力制御が実現できる<sup>11,12)</sup>。この制御法はロボットが環境に接触する場合, ロボットと環境との動力学的相互作用をインピーダンスの変化としてとらえ, ロボットと環境とを統合して制御対象とすることを示しており, 本研究で取り扱うマスタ・スレーブ・システムにおいても有効に利用できる<sup>2,3)</sup>。

インピーダンス制御型マスタ・スレーブ・システム概念図を Fig. 1 に示す。スレーブマニピュレータが作業を行う環境を対象物も含めて作業環境と言い, マスタ側で作成した作業環境のモデルを操作環境と言う。システムはマスタシステムとスレーブシステムの2つの部分から成る。それぞれのアームは各システムのコンピュータに接続され制御される。コンピュータは, アーム制御の管理を行うスーパーバイザと各環境のモデルを作成する環境シミュレータからなる。また, マスタシステムとスレーブシステムは, アームの運動あるいは力についての情報を相互に通信する。

既に提案している等物理条件・伝送遅れ無しの場合下におけるインピーダンス制御型マスタ・スレーブの基本システム<sup>3)</sup>は, 伝送する情報により4種に分類されるが, ここでは代表的な双方向力情報伝送方式についてのみ簡単に説明する。

双方向力情報伝送方式では力センサあるいはトルクセンサを使ってマスタの操作力・スレーブの反力の情報を得てマスタ・スレーブの双方向に伝送する。(Fig. 1) まずマスタとスレーブが同じ動特性を有しているか又は各アームをスーパーバイザからインピーダンス制御する<sup>2)</sup>

ことで互いに等しいインピーダンスを保持しているとし, マスタマニピュレータの状態式及び制御式を次のように実現する。

$$F_0 = M_0 \ddot{X}_m + B_0 \dot{X}_m + K_0 X_m - F_1 \quad (1)$$

$$F_1 = -F_e \quad (2)$$

また, スレーブマニピュレータの状態式と制御式を次のように実現する。

$$F_2 = M_0 \ddot{X}_s + B_0 \dot{X}_s + K_0 X_s + F_e \quad (3)$$

$$F_2 = F_0 \quad (4)$$

さらに, 対象物の状態式を次のように表す。

$$F_e = M \ddot{X}_s + B \dot{X}_s + K \delta X_s \quad (5)$$

但し,  $(M_0, B_0, K_0)$  はアームの目標インピーダンスパラメータ,  $(M, B, K)$  は対象物のインピーダンスパラメータ,  $F_0$  はマスタへの操作力,  $F_1, F_2$  は各々マスタとスレーブの内部トルク,  $F_e$  は対象物からスレーブアームへの反力,  $X_m, X_s$  は各々マスタとスレーブの位置を表す。また,  $C_1, C_2$  は各々マスタ・スレーブの制御手法を表す。ここで各インピーダンスパラメータの慣性・粘性・剛性は  $6 \times 6$  の行列, 各位置  $X_m, X_s$  と各力  $F_0, F_1, F_2, F_e$  はそれぞれ6次元ベクトルである。(1)~(5)式より,  $e = X_m - X_s$  とおいて,

$$M_0 \ddot{e} + B_0 \dot{e} + K_0 e = 0 \quad (6)$$

ここで振動の収束条件に従った適切な目標インピーダンスパラメータ  $(M_0, B_0, K_0)$  を各アームに設定することにより  $e \rightarrow 0$  となり, 漸近的に  $X_m = X_s \rightarrow X$  となる<sup>3)</sup>。これと (1), (3), (5) 式より操作力と反力の関係は,

$$\begin{aligned} F_0 &= (M_0 \ddot{X} + B_0 \dot{X} + K_0 X) + F_e \\ &= (M_0 \ddot{X} + B_0 \dot{X} + K_0 X) \\ &\quad + (M \ddot{X} + B \dot{X} + K \delta X) \end{aligned} \quad (7)$$

と表され, 十分小さい目標インピーダンスを設定すれば  $F_0 = F_e$  となり, 対象物をほぼ直接操作しているような感覚を持つことができる。

### 2.2 基本システムの拡張

本論文では, 理想応答のように対象物を直接操作する感覚だけでなく操作者の作業能力を拡張することを重要であると考えており, 提案するシステムにより操作者にとって理想的な操作環境を実現することを目標としている。この理想的な操作環境は作業内容・作業環境・操作者の能力等に依存し一般的な定義を議論することは将来的課題であるが, このような臨場感を実現するための最初の段階として, マスタ・スレーブの各アームと環境の動特性をインピーダンスモデルで統一して記述し各アームの動特性を独立かつ直接に制御するシステムを提案しその機能を評価することを試みる。まずこの節では, 第1章で述べた操作感の変更と等物理条件でない場合への

対応という2つの課題について詳しく解析する。

第1の課題は、操作感の変更方法である。スレーブ側の作業環境は必ずしも操作者にとって作業しやすい操作環境ではない。作業環境によっては作業の支障となる動特性を有したり、逆に作業に有用な動特性を付加したい場合があり得る。例えば、慣性の大きな対象物を移動させる場合あるいは粘性の非常に大きな環境で作業する場合には、これは操作者にとっては作業の支障となる。また、粘性の異なるいくつかの領域にまたがって作業する際、その境界を認識することが必要な場合でもそれらの領域の粘性にはほとんど違いがないことがあり得る。レイジスタンスの観点ではまず作業環境をリアルに捉えることが課題となるが、さらに操作者の作業を補助する意味から対象物も含めた環境の動特性を見かけ上変更することも重要である。先の例では対象物の見かけ上の慣性を減少させたり各領域の粘性に大きな差が生じれば作業が容易になる。操作者はアームのインピーダンスを通して対象物を操作することから、環境の動特性を見かけ上変更するには対象物を把持しているアームの目標インピーダンスをアームの運動状態に対して変更していくことで可能となる。

第2は、マスタ・スレーブの各環境が等物理条件でない場合の対応方法である。スレーブマニピュレータは一般に作業環境によって人間の腕とは形状や動作速度あるいは入出力条件が異なる。例えば寸法と力の微小なマイ

クロマニピュレータ、大型で高速・高出力のアーム、あるいは長い形状で低速動作の宇宙用マニピュレータのように様々である。従来はこれらのアームを単に幾何学的な相似関係でしか捉えておらず、操作者は、その相似関係に従って幾何学的に拡大・縮小した力や運動の情報をもとにマスタを操作していた。しかし、スレーブ側の環境をリアルに把握しながら作業に要求される速度で動作するには幾何学的相似関係だけでは不十分であり、マスタ・スレーブの動作をその環境も含めて物理現象の観点から捉えた物理的相似関係として考えるべきである<sup>13)</sup>。

即ち、マニピュレータが単に人間の操作通りに動くだけでは操作に熟練を必要とするだけでなくマニピュレータの性能を十分にいかすことにはならない。また、スレーブに要求される動作速度でマスタを操作するのは操作者に過大な負担をかける場合がある。例えば、作業環境によっては人間の可能な速度以上にアームを速く動かす必要のある場合や人間が耐えがたい程低速の動作が必要な場合がある。このような場合でも高度な臨場感を得ながら操作性の良いシステムにするには、無理な動作速度を強いられることなく普通と感じる程度の速度で操作者は作業を行い、スレーブ側ではこの動作に適当な変換を施すことで目的の速度でアームを動作させればよい。町田ら<sup>14)</sup>は宇宙空間での追従特性の低いスレーブアームを想定し、ビデオテープのように時間的な作業編集を行うことで操作者の動作をスレーブの低速な動作へ変換す

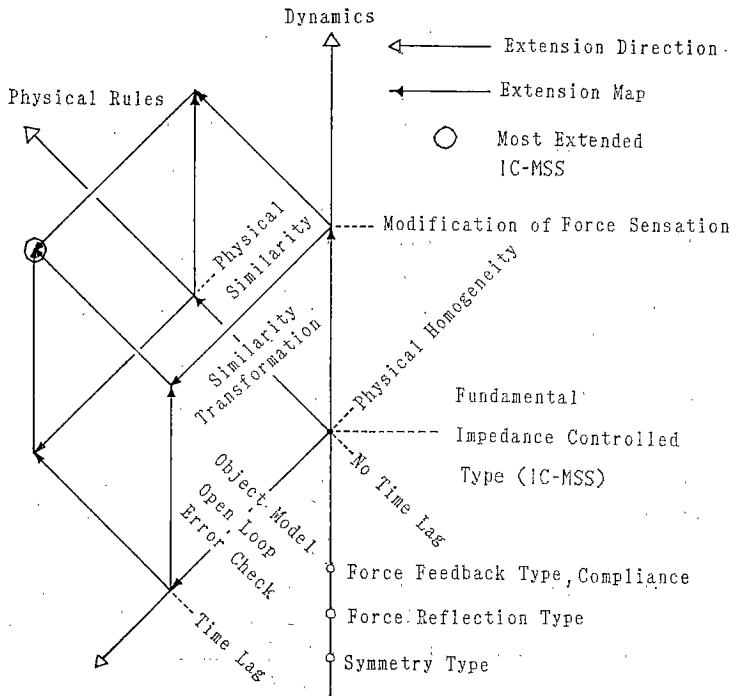


Fig. 2 Extension Graph of Bilateral MSS

る方法を提案しているが、マスタ・スレーブの動作を時間の比のみで変換しており物理的一般性が保証されていない。

もうひとつは、入出力条件を変換することで操作性の良い臨場感を持たせることが考えられる。例えば血管の手術をマスタ・スレーブでおこなう際に、マイクロマニピュレータがつかんだ血管をまるでゴムホースのように感じることができれば手術が容易になる。これには、単にマスタアームとマイクロマニピュレータの幾何学的な比だけではなく、対象物の材質まで含めた物理的な相似関係を捉えて入出力条件を変換すれば操作性の良い臨場感を得ることができる。

本論文の提案するシステムでは、マスタ・スレーブの動作を単に時間の比あるいは幾何学的な比で変換するのではなく、物理的相似関係すなわち相似則として捉え、マスタとスレーブが異形状・異入出力条件・異なる動作速度の場合でも相似則を満たすようにインピーダンスを調整することで、物理的な一般性を失うことなく臨場感を提供する方法を提案する。

以上、インピーダンス制御型マスタ・スレーブの基本システムの拡張を、伝送遅れへの対応も含めて整理し Fig. 2 に示す。まず従来のバイラテラル系が一般化されてインピーダンス制御型マスタ・スレーブの基本システムを構成し、対象物の動特性を高度な臨場感で把握する。この点ではマスタとスレーブの環境で動特性の変更がなく物理的に同型であり伝送遅れはない。ここを起点とし動特性・物理法則・伝送遅れの3方向へ拡張する。動特性方向には操作感の変更、物理法則方向へは相似則による速度や入出力条件の変更、また対象物のモデル化による時間遅れへの対応が可能となる。これらの方向へ最大に拡張した点を○で表す。

### 3. 拡張されたインピーダンス制御型マスタ・スレーブの実現法

ここでは第2章で述べたように、2つの方向に拡張したインピーダンス制御型マスタ・スレーブを実現する方法について説明する。

#### 3.1 作業環境モデルの作成

まず、スレーブアームを自律的あるいは操作者からの指令により動作させて対象物のインピーダンスを測定する。アームのインピーダンスを既知とすれば、アームとアームに把持された対象物の運動を計測することで対象物のインピーダンスを計算することができる<sup>3)</sup>。次いで、スレーブシステムの作業環境モデルをもとにマスタシステムの操作環境モデルを作成する<sup>3)</sup>。環境モデルに於けるインピーダンスは次のように6次元のインピーダンス

ベクトルとして定義される。

$$Z(X)=[z_{p1} z_{p2} z_{p3} z_{r1} z_{r2} z_{r3}]^T \quad (8)$$

作業環境から操作環境への座標変換として次の写像 $\Gamma$ を定義する。写像 $\Gamma$ は、座標間の原点を一致させる操作 TRNS( $\cdot$ )、座標の方向を一致させる操作 ROT( $\cdot$ )、座標のあるスケール倍する操作 SCL( $\cdot$ ) からなる。

$$\Gamma(\cdot)=SCL(ROT(TRNS(\cdot))) \quad (9)$$

このとき作業環境モデルと操作環境モデルが一致することを次のように定義する。すなわち、作業環境モデルの座標 $X_t$ におけるインピーダンスを $Z_t$ 、座標 $X_t$ に対応する操作環境モデルの座標 $X_0$ におけるインピーダンスを $Z_0$ とすると、

$$Z_t(X_t)=Z_0(X_0) \quad (10)$$

のときに両モデルは一致するとする。但し、

$$X_0=\Gamma(X_t) \quad (11)$$

である。

#### 3.2 操作感の変更

3.1 で述べたようにモデル化した操作環境をもとに、操作感を変更する手法について考察する。

##### 3.2.1 環境の記憶・再現

環境のインピーダンスモデルは記憶しておき、操作者の要求に応じて何度も再現する。

スレーブマニピュレータの動作により環境の同定が終了したならば、そのインピーダンスのデータはコンピュータに記憶される。環境のインピーダンスは、スレーブマニピュレータが環境と接触した位置によって定まり、その位置も併せて記憶される。次に3.1で述べたように、環境のインピーダンスのデータはマスタシステム側へ送られ、それをもとにマスタシステム内に環境モデルが作成される。環境モデルの作成後、操作者がある位置にマスタマニピュレータを動かした時、その位置の環境モデルのインピーダンスのデータをマニピュレータの内部フィードバックに取り込めば、操作者は環境モデルの慣性・粘性・剛性を感じることができる。こうして同定した環境が再現され臨場感が生じる。

例えば、スレーブマニピュレータの左側に硬い壁、右側にゴムの膜、下方に水が張られているとする。それらのインピーダンスが同定され、そのデータを元にマスタシステムで環境モデルがつくられる。操作者がマスタマニピュレータを動かす際、操作者が左側にマニピュレータを動かすと高い剛性が、右側に動かすと低い剛性が、下方に動かすと粘性がマニピュレータの内部フィードバックに取り込まれ、左側に硬い壁、右側にゴムの膜、下方に水を感じることができる。

このように記録した環境インピーダンスで作業をシミュレートするだけでなく、反復練習することで複雑な手

順や失敗の許されない操作の教示を行うことができる。即ち、マスタシステムのみを動作させて操作者が繰り返し作業を練習し、最適な作業動作及び目標インピーダンスを設定する。それをスレーブシステムに送信しスレーブマニピュレータに作業させる。また、次節に述べるように過大な負荷等の危険や支障がないかどうかを点検し、操作環境を改良することもできる。

3.2.2 環境の調整

ここでは、マスタ・スレーブの各システムにおける環境モデルの調整について述べる。

マスタ・スレーブの各環境モデルの目標インピーダンスを一致させる場合、操作環境モデルが操作者にとって操作しやすいかどうかはまだ保証されていない。即ち、操作環境モデルの目標インピーダンスを操作者にとって都合の良い目標インピーダンスの範囲に収まるように改良する必要がある。そのための手法を以下に示す。

①操作環境モデルのインピーダンスを  $Z_0(X_0)$ 、理想的な操作環境のインピーダンスを  $Z_{01}(X_0)$  で表す。この時、次の写像  $\Psi$  を定義する。

$$Z_{02}(X_0) = \Psi(Z_0(X_0)) \quad (12)$$

写像  $\Psi$  は、見かけ上の作業環境のインピーダンス  $Z_0(X_0)$  が理想的な操作環境の領域に入るようにする適当な変換である。例えば  $Z_0(X_0)$  の上限と下限が理想的な操作環境の上限・下限  $Z_{01u}(X_0)$ ,  $Z_{01l}(X_0)$  を越え作業中に不安定をもたらすと判断される部分について、理想的な操作環境の上限・下限と同じ値に変更しその近傍を滑らかに接続する。この変換により  $Z_{02}(X_0)$  は、各インピーダンスのそれぞれのパラメータの値  $p(\cdot)$  に対し、

$$p(Z_{01l}(X_0)) \leq p(Z_{02}(X_0)) \leq p(Z_{01u}(X_0)) \quad (13)$$

の条件を満たし、理想的な操作環境の領域に含まれる。

②この写像  $\Psi$  により理想的な操作環境をほぼ作り上げ

ることができるが、それは一般の操作者に対してであって、個々の操作者または個々の作業にとって操作の容易な動特性を持つ操作環境を作るには、さらに部分的な改良が必要である。そこで操作者からの指令により  $Z_{02}(X_0)$  を改良して  $Z_{03}(X_0)$  とし、その操作者にとって理想的な操作環境モデルを作成する。

③この環境モデルを元に、3.1.2 で示した写像  $\Gamma$  の逆写像  $\Gamma^{-1}$  を施してスレーブシステム内に作業環境のモデルを再構築し、操作環境モデルと作業環境モデルを一致させる。

このように環境インピーダンスの調整とは、マスタ・スレーブが、等物理条件の下で操作環境を操作者にとって作業性の良い環境モデルに変換することである。すなわち、操作環境モデルのインピーダンス  $Z_0(X_0)$  はほぼ理想的な操作環境インピーダンスの領域に含まれているが、部分的にその領域を越えている場合に写像  $\Psi$  により操作環境のインピーダンス  $Z_0(X_0)$  をその部分について修正を行う。但し、操作環境のインピーダンスが理想的な操作環境インピーダンスと甚だしく異なる場合、例えばマスタ・スレーブの形状や入出力条件あるいは動作速度が異なる場合については別の変換を必要とする。これについては3.3で議論する。

3.2.3 操作感の変更方法

ここでは、操作環境を調整あるいは変更を実現する手法について述べる。

マニピュレータの運動方程式が次で与えられているとする。

$$I\ddot{\theta} + D_v\dot{\theta} = T_a + J^T F_e \quad (14)$$

但し、 $I$  は慣性行列、 $D_v$  は粘性行列、 $T_a$  は出力トルク、 $J^T$  はヤコビアン の 転置行列、 $\theta$  は角度ベクトルを示す。

マニピュレータが対象物に接触している時の、全体の

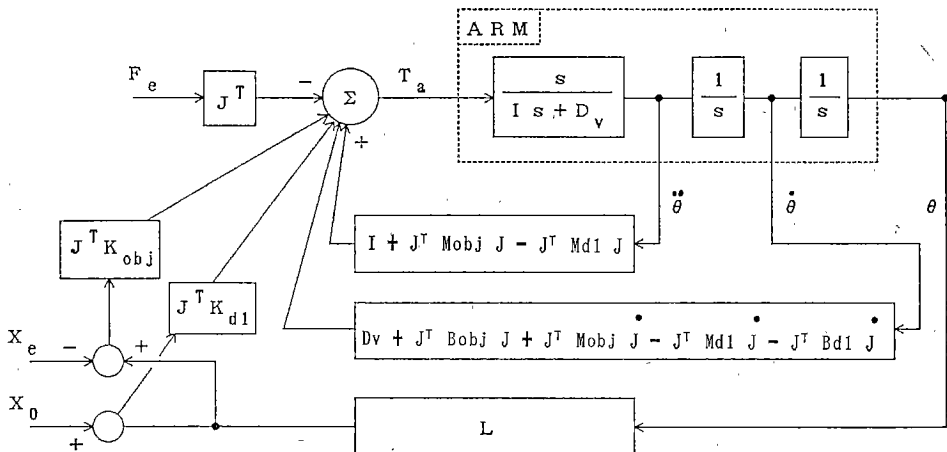


Fig. 3 Block Diagram of Impedance Control with an Object

目標インピーダンス  $Z(s)$  を,

$$Z(s) = M_{d1}s + B_{d1} + (1/s)K_{d1} \quad (15)$$

とすると全体の見かけ上の運動方程式は次のようになる。

$$F_e = M_{d1}\ddot{X} + B_{d1}\dot{X} + K_{d1}(X - X_0) \quad (16)$$

そこでインピーダンスパラメータ ( $M_{0bj}$ ,  $B_{0bj}$ ,  $K_{0bj}$ ) を持つ対象物にマニピュレータが接触しているとき、(15) 式で定めた目標インピーダンスパラメータ ( $M_{d1}$ ,  $B_{d1}$ ,  $K_{d1}$ ) を実現するために必要なアクチュエータの出力は、以下のように決定される。

$$\begin{aligned} T_a = & (I + J^T M_{0bj} J - J^T M_{d1} J) \ddot{\theta} \\ & + (D_v + J^T B_{0bj} J + J^T M_{0bj} \dot{J} \\ & - J^T M_{d1} \dot{J} - J^T B_{d1} J) \dot{\theta} \\ & + J^T \{ K_{0bj} (L(\theta) - X_e) + K_{d1} (X_0 - L(\theta)) \} \end{aligned} \quad (17)$$

このブロック線図を Fig. 3 に示す。

マスタ・スレーブシステムを使って組み立て作業を行うときには、ある物体を押すあるいは把持して移動させる作業を行うことが多い。こうした可動な対象物に対する作業を考える。

①マニピュレータが動作を停止するまで対象物を把持し続ける場合には、マニピュレータと対象物の合成したインピーダンスを計算して環境モデルを書き換えていく。把持されている対象物をマニピュレータの一部とみなすことで、書き換えられた環境モデルからマニピュレータと対象物の運動を推定することができ、操作者が指定する目標インピーダンスに沿った制御が可能となる。

3.1 で述べたように、スレーブマニピュレータの目標インピーダンスパラメータ ( $M_d$ ,  $B_d$ ,  $K_d$ ) と、マニピュレータと対象物の合成インピーダンスパラメータ ( $M_s$ ,  $B_s$ ,  $K_s$ ) とから、対象物のインピーダンスパラメータ ( $M_{0bj1}$ ,  $B_{0bj1}$ ,  $K_{0bj1}$ ) は次のように求められる<sup>3)</sup>。

$$K_{0bj1} = (K_s^{-1} - K_d^{-1})^{-1} \quad (18)$$

$$B_{0bj1} = (B_s^{-1} - B_d^{-1})^{-1} \quad (19)$$

$$M_{0bj1} = (M_s^{-1} - M_d^{-1})^{-1} \quad (20)$$

これらのパラメータ  $M_{0bj1}$ ,  $B_{0bj1}$ ,  $K_{0bj1}$  を改めてそれぞれ  $M_{0bj}$ ,  $B_{0bj}$ ,  $K_{0bj}$  と置いて (17) 式に代入すれば所定の目標インピーダンスに沿った制御が可能となる。

②マニピュレータが動作の途中で対象物を離す。例えば対象物を押して動かす場合がこれに当たる。マニピュレータが対象物と接触している時は先の方法と同様にして両者の合成インピーダンスを計算することができる。対象物とその周辺の環境のインピーダンスは既知なことから、マニピュレータが対象物を離れた瞬間の速度が分かれば対象物のその後の運動を推定することができる。推定した運動結果に基づき環境モデルを変更していく。

以上のような手法を用いて、同定した環境をまるで自

分の体の一部のように制御し操作者にとって好ましい環境をつくり出す。マニピュレータが環境と接触しているとき、それらを合わせた全体のインピーダンスを考え、このインピーダンスをマニピュレータの内部フィードバックに取り込むことで環境の動特性を任意に制御することができる。

### 3.3 物理的相似変換を応用した操作能力の拡張

環境モデルをインピーダンスで捉えるとき、操作環境と作業環境は、幾何学的相似関係だけでなく、物理的な相似関係を満たすべきである。ここでは、まず第2章で説明したインピーダンス制御型マスタ・スレーブの基本システムにおいて、マスタとスレーブに互いに等しいインピーダンスを設定すれば、マスタ・スレーブ間の相似則が自然に満たされることを示す。次いで、両環境の物理的相似関係を応用し、操作者の能力を動作速度及び入出力条件について拡張する方法を議論する。

①操作環境と作業環境とで同じ物理現象が生じるためには、両環境で同じ物理法則が支配し全ての物理量が相似になる、即ち相似則が成立しなければならない<sup>13)</sup>。マスタ・スレーブで互いに等しいインピーダンスを保持するとき次の定理が成立する。

[定理1] 操作環境と作業環境の両者とも等しい目標インピーダンスを設定すれば、両者の間で相似則は自然に満たされる。具体的には支配的な物理法則を次の3つと仮定し、各式を代表値の関係式で表す<sup>13)</sup>。

慣性の法則;  $f_i = f\alpha = \rho l^4 / t^2$  (21)

粘性力の関係式;  $f_v = bv = \mu v = \mu l^2 / t$  (22)

バネ力の関係式;  $f_k = kl$  (23)

ただし、 $\rho$  は密度、 $l$  は長さ、 $\mu$  は粘性係数、 $t$  は時間の代表値を表す。パイナンバーにより無次元化すると、

$$\pi_1 = f_i / f_v = \rho l^2 / (\mu t) \quad (24)$$

$$\pi_2 = f_k / f_v = kt / (\mu l) \quad (25)$$

ここでスレーブの各パラメータは対応するマスタの各パラメータに ' をつけて表す。

マスタ・スレーブのインピーダンスが等しい、即ち、

$$m = m', \quad b = b', \quad k = k' \quad (26)$$

であるとき、次が成立する。

$$\pi_1 = \pi_1', \quad \pi_2 = \pi_2' \quad (27)$$

(証明は APPENDIX を参照)

②作業を行う速度を変換し操作者の能力を拡張する。操作者が求められている動作速度に直接合わせて作業を行うのは困難な場合、あらかじめ目標とする動作をマスタシステムのみでシミュレートしてその内容をシステム内に記憶し、相似則にしたがって作業速度を変換した後、作業内容をスレーブシステムに送信し目標とする速度で作業を遂行させる。マスタシステムでの操作は、両環境

での動作速度比にもとづき各環境のインピーダンスパラメータを変換することによって行われる。

〔定理2〕 操作環境と作業環境での幾何学的相似比 $l^*$ が決まっているとき、動作速度の比 $v^*$ を指定して各環境におけるインピーダンスパラメータの比を適当に決めれば相似則は満足される。即ち、支配的な物理法則を定理1と同じとし、幾何学的相似比 $l^*$ と密度の比 $\rho^*$ を定め、動作速度の比 $v^*$ を指定したとき各環境に於けるインピーダンスパラメータの比を、

$$\left. \begin{aligned} m/m' &= \rho^* l^{*3} \\ b/b' &= \rho^* l^{*2} v^* \\ k/k' &= \rho^* l^* v^{*2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

と決めれば相似則は満足される。但し、

$$l^* = l/l', \quad \rho^* = \rho/\rho', \quad v^* = v/v'$$

とする。(証明は APPENDIX を参照)

作業速度の変換は具体的にはマスタの操作力からスレーブの内部トルクへの変換と考えられる。これについての原理を次に示す。

〔系2-1〕 作業速度における相似則(定理2)を満たすマスタとスレーブにおいて $\rho^*=1, l^*=1$ とし、作業速度の比を $v^*$ とすると、マスタへの操作力の時間履歴 $f_m(t)$ とスレーブの内部トルクの時間履歴 $f_s(t)$ は次の関係を持つ。

$$f_s(t) = (1/v^{*2}) f_m(t/v^*) \quad (29)$$

(証明は APPENDIX を参照)

ここで、系2-1は $\rho^*$ 及び $l^*$ が一般の比の場合にも容易に拡張できる。

③マスタとスレーブの幾何学的な比だけではなく、対象物の材質まで含めた物理的な相似関係を捉えて入出力条件を変換し、操作性の良い臨場感を得ることができる。

〔定理3〕 操作環境と作業環境の幾何学的相似比 $l^*$ を定めたとき、各環境における対象物の物理的性質(密度・粘性・剛性)の比を適当に決めるようなインピーダンスパラメータの比が存在し、かつ、相似則を満足する。このとき幾何学的な比とインピーダンスパラメータの比により、マスタ・スレーブの入出力条件の比は決定される。即ち、支配的な物理法則を定理1と同じとし、幾何学的な相似比 $l^*$ を定め、密度の比 $\rho^*$ 、粘性の比 $\mu^*$ 、剛性の比 $k^*$ のいずれかを指定する。このときマスタ・スレーブのインピーダンスパラメータの比は、例えば密度の比 $\rho^*$ により、

$$m/m' = b/b' = k/k' = \rho^* l^{*3} \quad (30)$$

と定まり、かつ相似則を満足する。このときマスタとスレーブの入出力条件は

$$f/f' = \rho^* l^{*4} \quad (31)$$

となる。但し、

$$l^* = l/l', \quad \rho^* = \rho/\rho', \quad \mu^* = \mu/\mu', \quad k^* = k/k' \quad (32)$$

である。(証明は APPENDIX を参照)

本システムでは、このようにマスタとスレーブが異形状・異入出力条件・異なる動作速度の場合でも相似則を満たすようにインピーダンスを調整することで物理的な一般性を失うことなく臨場感を供与することができる。また、相似則を用いた変換ではマスタ・スレーブの相互の安定性が保存される。(APPENDIX を参照)

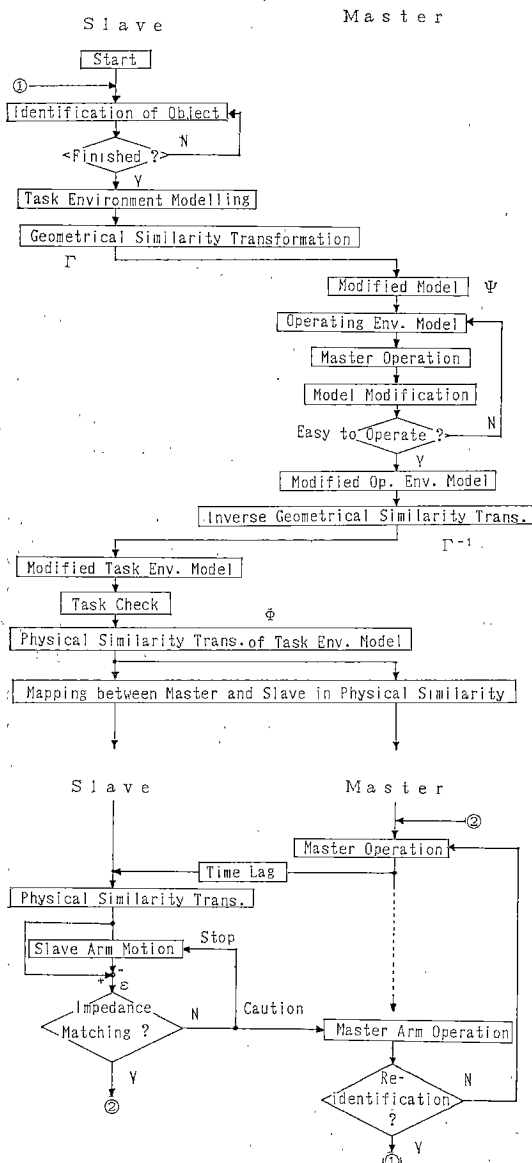


Fig. 4 Operation Flow of Extended Impedance Controlled MSS



### 3.4 拡張されたインピーダンス制御型マスタ・スレーブの操作フロー

ここでは、拡張されたインピーダンス制御型マスタ・スレーブの操作フローを説明する。Fig. 4 に動作アルゴリズムを示す。

①3.1 で述べたようにスレーブマニピュレータを作業環境で動作させて同定作業を行いスレーブシステム内に作業環境のモデルを作り、環境の位置及びインピーダンスをマスタシステムに送信する。マスタシステムは、その通信データをもとに作業環境に一致するように操作環境のモデルを作成する<sup>9)</sup>。

②次に、操作環境の調整を行うが、操作者にとって操作性の良いマスタマニピュレータの形状や入出力条件あるいは動作速度が、スレーブマニピュレータの作業に実際に要求されるものと異なる場合、相似則を満足するように各インピーダンスを調整することでマスタ・スレーブ間の幾何学的あるいは入出力条件や動作速度の変換を行う。(3.2.2 および 3.3 参照)

③マスタシステムのみを動作させ、操作者がマスタマニピュレータを動作させることで操作環境に接触する。操作者は、その時得られた操作感をもとに、操作環境を作業に都合の良いように調整する。調整結果はスレーブシステムへ送信され、作業環境も操作環境に一致するように調整される。(3.2.1 および 3.2.2 参照)

④マスタ・スレーブシステムを動作させ、マスタマニピュレータを動かすことにより作業を行う。マスタシステムのスーパーバイザは操作環境のモデル(目標インピーダンス)をもとにマスタマニピュレータの運動方程式を組み立てており、マスタマニピュレータの運動をその式に代入して操作者への反力を計算し、必要な出力トルクを指令する。同時にマスタマニピュレータの運動がスレーブシステムへ実時間で送信される。スレーブシステムのスーパーバイザは、その運動データからマスタシステムと同様にして必要な出力トルクを計算しスレーブマニピュレータを制御する。(3.2.3 参照)

この作業システムでは、時間遅れに対応して作業したり、3.2.1 で述べたようにマスタシステムのみを動作させてシミュレートされた作業を繰り返し練習しスレーブマニピュレータのティーチングを行う。あるいは、3.3 で説明したようにスレーブマニピュレータの入出力条件や作業速度を変換して操作する。(図中では変換  $\phi$ )

⑤スレーブマニピュレータの実際の運動は常に監視され、さきに計算したモデルの運動と比較される。それらの運動に差が生じたならば、スレーブシステムはマスタシステムに警告を発生し再度同定作業を行って作業環境モデルを修正する<sup>9)</sup>。



Fig. 5 Experimental System

## 4 制御実験

### 4.1 実験装置

実験に使用するマニピュレータ<sup>2)</sup>は垂直多関節型であり3自由度を持つ。アクチュエータとしては正確な内部モデルを推定するためと精密な力制御を行うために DD (ダイレクト・ドライブ) モータを採用したダイレクト・ドライブ方式である<sup>15)</sup>。各軸とも Inland 社製の DC トルクモータを使用している。Fig. 5 にその概観を示す。

実験ではこのマニピュレータの第1軸を固定して2軸の DD ロボットとし、これを水平方向の1軸マスタマニピュレータとして用いる。また、スレーブマニピュレータ及び対象物は計算機内でシミュレーションを行う。各アームと対象物のインピーダンスを設定し、マスタマニピュレータを操作者が動かして、マスタとスレーブの運動追従性及び操作力と反力の追従性を計測する。

### 4.2 相似則の応用(作業速度の変換実験)

定理2及び系2-1に示した原理を用いてマスタ・スレーブ間の作業速度の変換実験を行う。 $\rho^*=1$ ,  $l^*=1$ とし、作業速度の比を  $V^*=2/3$  とすると、系2-1よりマスタとスレーブの各インピーダンスパラメータは次のように設定できる。

$$M_0 = 0.5 \text{ [kg]}, B_0 = 20.0 \text{ [N/(m/s)]},$$

$$K_0 = 40.0 \text{ [N/m]}$$

$$M_s = 0.5 \text{ [kg]}, B_s = 30.0 \text{ [N/(m/s)]},$$

$$K_s = 90.0 \text{ [N/m]}$$

これらのインピーダンスパラメータを設定した各アームに対し、マスタへの操作力及びこれを変換したものをスレーブの内部トルクとして各アームに加える。Fig. 6 にマスタへの操作力とマスタの変位、スレーブへの内部トルクとスレーブの変位の各時間履歴を示す。各アームとも4.1で説明した DD アームを用いた。相似則に沿って変換されたインピーダンスと内部トルクに対し、スレーブは、物理的相似関係を保ちながらマスタの動作の  $V^*=2/3$  だけ時間的に圧縮した動作を行っている。

4.3 相似則の応用 (入出力条件の変換実験)

定理 3 を用いて入出力条件の変換を実験する.  $\rho^*=2$ ,  $I^*=10$  とし, マスタアームと対象物モデルの各インピーダンスパラメータを次のように設定する. 定理 3 より, スレーブ側はこれらの  $1/\rho^*I^{*3}=1/2000$  倍のインピーダンスパラメータを持つ.

$$M_0=0.05 \text{ [kg]}, B_0=1.0 \text{ [N/(m/s)]},$$

$$K_0=0.1 \text{ [N/m]}$$

$$M=0.01 \text{ [kg]}, B=5.0 \text{ [N/(m/s)]},$$

$$K=5.0 \text{ [N/m]}$$

双方力情報伝送方式を用いて, マスタでは DD アームを制御しスレーブはシミュレーションを行う. Fig. 7 にマスタとスレーブの位置と力の時間履歴を示す. スレーブはマスタに対し, 定理 3 に示したように, ほぼ  $1/I^*=1/10$  倍の位置で追従し, 操作者へは  $\rho^*I^{*4}=20000$  倍の反力を返している.

5. ま と め

本論文は, テレイグジスタンスの研究の一環として, 高度の臨場感を持つマスタ・スレーブ・システムを開発することを目的としている. このシステムを構成するにあたり基本となる概念としてインピーダンス制御を採用し, 環境をリアルに把握しさらに環境を制御して人間にとって理想的な臨場感を提供するシステムの基本設計を行った. このシステムの問題は, アームと環境の動特性を機械的インピーダンスのモデルで記述し, さらにこのモデルを操作者が作業しやすいように改変することによ

り高度の臨場感を与えようとするものであり, インピーダンス制御型マスタ・スレーブ・システムと呼ばれる. 既に提案しているインピーダンス制御型の基本システムを拡張し, 以下の 2 つの問題点を解決した.

第 1 は操作感の変更方法である. テレイグジスタンスの観点ではまず作業環境をリアルに捉えることが課題となるが, さらに操作者の作業を補助する意味から対象物も含めた環境のインピーダンスを見かけ上変更し操作性のよい臨場感を供与することを可能とした.

第 2 はマスタ・スレーブの各環境が等物理条件でない場合への対応方法である. マスタとスレーブの各動作をその環境も含めた物理的相似関係すなわち相似則として捉え, マスタとスレーブが異形状・異入出力条件・異なる動作速度の場合でも相似則を満たすように各インピーダンスを調整し, 物理的な一般性を失うことなく臨場感を提供する方法を提案した.

今後の課題として, 非線形な動特性を持つ対象物の同定手法や制御法あるいはアクティブな動作を行う対象物を制御する方法への拡張, あるいは操作者にとっての理想的な操作環境の解析が考えられよう. また, 対象物も含めた作業環境のインピーダンスをデータベース化し, アームから離れた対象物の動作を予測する手法の実現も将来的課題である.

謝 辞

日頃よりご支援頂いている機械技術研究所曾田長一郎所長, 矢田恒二ロボティクス部長, 阿部総元次長に厚くお礼申し上げる. また, 本研究を進めるにあたり, (株) 安川電機製作所坪井定一研究所長, 前波武前研究所長から多大な協力を頂いた. ここに感謝の意を表す.

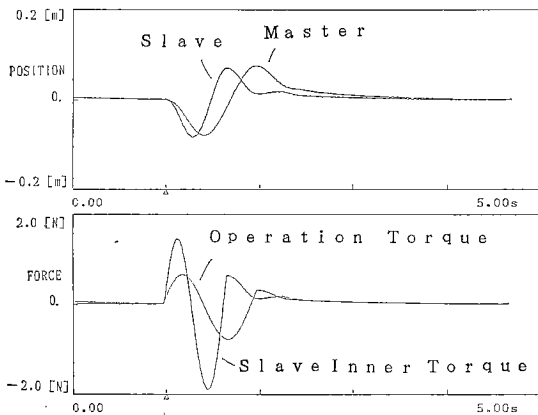


Fig. 6 Simulation Results of Velocity Transformation which maintains Physical Similarity

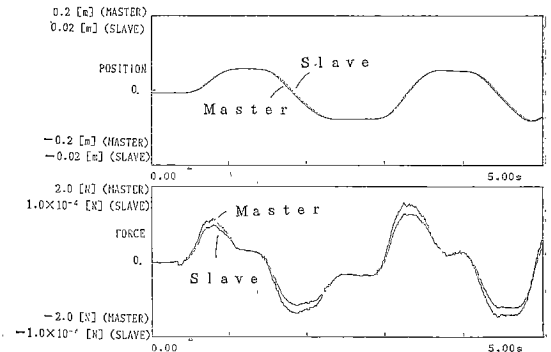


Fig. 7 Simulation Results of Force Transformation which maintains Physical Similarity

Note :  $\rho^*=2$ ,  $I^*=10$

Master Impedance Parameters ;

$$M_0=0.05 \text{ [kg]}, B_0=1.0 \text{ [N/(m/s)]}, K_0=0.1 \text{ [N/m]}$$

Object Impedance Parameters in Master System ;

$$M=0.01 \text{ [kg]}, B=5.0 \text{ [N/(m/s)]}, K=5.0 \text{ [N/m]}$$

Slave Impedance Parameters keep  $1/\rho^*I^{*3}=1/2000$  times of Impedance Parameters in Master System.

Transformation which maintains Physical Similarity  
 Note : Transformed Slave Motion is simulated offline.  
 ( $\rho^*=1$ ,  $I^*=1$ ,  $V^*=2/3$ )  
 Master Impedance Parameters ;  
 $M_0=0.5 \text{ [kg]}, B_0=20.0 \text{ [N/(m/s)]}, K_0=40.0 \text{ [N/m]}$   
 Slave Impedance Parameters ;  
 $M_s=0.5 \text{ [kg]}, B_s=30.0 \text{ [N/(m/s)]}, K_s=90.0 \text{ [N/m]}$

## 参考文献

- 1) 館ほか：テレイグジスタンスの研究 第1報, 第21回 SICE 学術講演会予稿集, 1982.
- 2) 館, 柳ほか：力センサを用いないダイレクト・ドライブ マニピュレータのインピーダンス制御, 日本ロボット学会誌, Vol.7, No.3, pp.175-187, 1989.
- 3) 館, 柳：インピーダンス制御型マスタ・スレーブ・システム(I) —基本システムと時間遅れへの対応—, 日本ロボット学会誌 (投稿中).
- 4) 福田：マイクロマニピュレータのバイラテラル制御に関する研究 (インピーダンス対応型バイラテラル制御方式とマイクロマニピュレータの基本特性), 第25回 SICE 学術講演会予稿集, 1986.
- 5) 古田, 小菅ら：仮想内部モデルに基づくマスタスレーブ マニピュレータの制御, SICE論文集, Vol.24, No.2, pp.176-182, 1988.
- 6) 吉川, 横小路：マスタスレーブシステムの操作性と安定性の解析, 第5回日本ロボット学会学術講演会予稿集, 1987.
- 7) 吉川, 横小路：マスタ・スレーブマニピュレータの動的制御の提案, 第27回 SICE 学術講演会予稿集, 1988.
- 8) 吉川, 横小路：種々の介在インピーダンスを実現するマスタ・スレーブマニピュレータの動的制御の提案, 第6回日本ロボット学会学術講演会予稿集, 1988.
- 9) 藤井ほか：マスタ・スレーブシステムの適応制御, 第6回日本ロボット学会学術講演会予稿集, 1988.
- 10) N. Hogan: Beyond regulators: modelling control systems as physical systems, Proc. Am. Control Conf., Vol.2, pp.1468-1476, 1987.
- 11) N. Hogan: Impedance control part I-III, ASME Trans., March 1985.
- 12) N. Hogan: Stable execution of contact task using impedance control, Proc. IEEE Int. Conf. Rob. Autom., Vol.2, 1987.
- 13) 江守：模型実験の理論と応用, 技報堂出版, 1973.
- 14) 町田ほか：シミュレータ介在型宇宙用テレオペレーションシステム, ロボティクス・自動化システムシンポジウム, pp.45-50, 1988.
- 15) 浅田：ダイレクト・ドライブロボットの開発とその制御性能の評価, 計測自動制御学会論文集, Vol.19, No.1, pp.77-84, 1983.
- 16) 新井：異構造マニピュレータ間におけるバイラテラルマスタスレーブ制御, 日本ロボット学会誌, Vol.4, No.5, pp.3-13, 1986.
- 17) B. Hannaford: A design framework for teleoperators with kinesthetic feedback, IEEE Trans. Rob. Autom., Vol.5, No.4, 1988.
- 18) J. Dudgeon et al.: A generalized bilateral control applied to master-slave manipulators, 20th ISIR, pp.435-442, 1989.

## APPENDIX

## A. 相似則の応用に関する定理の証明

## [定理1の証明]

相似則が成立するための条件は,

$$\pi_i = \pi'_i, \quad i=1, 2 \quad (\text{A-1})$$

すなわち,

$$\rho l^2 / \mu t = \rho' l'^2 / \mu' t' \quad (\text{A-2})$$

$$kt / \mu l = k' t' / \mu' l' \quad (\text{A-3})$$

である。ここで、両者のインピーダンスが等しいことから,

$$m = m', \quad b = b', \quad k = k' \quad (\text{A-4})$$

すなわち,

$$\rho l^3 = \rho' l'^3, \quad \mu l = \mu' l', \quad k = k' \quad (\text{A-5})$$

マスタ・スレーブ・システムは実時間で操作するので,

$$t = t' \quad (\text{A-6})$$

これらの条件のもとで相似則が満足されることを示す。

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \rho l^2 / \mu t \\ &= (\rho l^3 / \mu l) (1/t) \\ &= (\rho' l'^3 / \mu' l') (1/t') \\ &= \rho' l'^2 / \mu' t' \\ &= \pi_1' \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

$$\begin{aligned} \pi_2 &= kt / \mu l \\ &= (k / \mu l) t \\ &= (k' / \mu' l') t' \\ &= k' t' / \mu' l' \\ &= \pi_2' \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

(証明終)

## [定理2の証明]

定理1より、相似則の条件は,

$$\rho l^2 / \mu t = \rho' l'^2 / \mu' t' \quad (\text{A-9})$$

$$kt / \mu l = k' t' / \mu' l' \quad (\text{A-10})$$

これより,

$$\rho^* l'^2 = \mu t / \mu' t' \quad (\text{A-11})$$

$$l^* \mu / \mu' = kt / k' t' \quad (\text{A-12})$$

これらが成立することを示す。定理2の仮定より,

$$\begin{aligned} \mu l / \mu' l' &= \rho^* l'^2 (v/v') \\ &= \rho^* l'^3 (t'/t) \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

従って,

$$\mu t / \mu' t' = \rho^* l'^2 \quad (\text{A-14})$$

また,

$$\begin{aligned} k/k' &= \rho^* l^* (l'/l')^2 \\ &= \rho^* l'^3 (t'/t)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

よって,

$$\begin{aligned} kt/k' t' &= \rho^* l'^3 (t'/t) \\ &= l^* \mu / \mu' \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

(証明終)

## [系2-1の証明]

代表値で表したマスタとスレーブの運動方程式を各々,

$$f_m(t) = m \ddot{X}_m(t) + b \dot{X}_m(t) + k \delta X_m(t) \quad (\text{A-17})$$

$$f_s(t) = m' \ddot{X}_s(t) + b' \dot{X}_s(t) + k' \delta X_s(t) \quad (\text{A-18})$$

と表す。相似則の条件より,

$$m^* = 1 \quad (\text{A-19})$$

$$b^* = b/b' = v^* \quad (\text{A-20})$$

$$k^* = k/k' = v^{*2} \tag{A-21}$$

$$= \rho^* l^{*4} \tag{A-32}$$

また、相似則を満たせばその結果として、

$$\delta X_s(t) = \delta X_m(t/v^*) \tag{A-22}$$

$$\dot{X}_s(t) = (1/v^*) \dot{X}_m(t/v^*) \tag{A-23}$$

$$\ddot{X}_s(t) = (1/v^{*2}) \ddot{X}_m(t/v^*) \tag{A-24}$$

以上より、

$$\begin{aligned} f_s(t) &= m' \ddot{X}_s(t) + b' \dot{X}_s(t) + k' \delta X_s(t) \\ &= (m/v^{*2}) \ddot{X}_m(t/v^*) \\ &\quad + (b/v^{*2}) \dot{X}_m(t/v^*) \\ &\quad + (k/v^{*2}) \delta X_m(t/v^*) \\ &= (1/v^{*2}) \{m \ddot{X}_m(t/v^*) + b \dot{X}_m(t/v^*) \\ &\quad + k \delta X_m(t/v^*)\} \\ &= (1/v^{*2}) f_m(t/v^*) \end{aligned} \tag{A-25}$$

(証明終)

[定理 3 の証明]

定理 1 より実時間 ( $t=t'$ ) で操作する場合の相似則は、

$$\rho l^2 / \mu = \rho' l'^2 / \mu' \tag{A-26}$$

$$k / \mu l = k' / \mu' l' \tag{A-27}$$

すなわち、

$$\mu / \mu' = \rho^* l^{*2} \tag{A-28}$$

$$k / k' = (\mu / \mu') l^{*3} = \rho^* l^{*3} \tag{A-29}$$

ここで、

$$m = \rho l^3, \quad b = \mu l \tag{A-30}$$

より、

$$m / m' = b / b' = k / k' = \rho^* l^{*3} \tag{A-31}$$

また、

$$\begin{aligned} f / f' &= \{ml/t^2 + bl/t + kl\} / \{m'l'/t'^2 + b'l'/t' + k'l'\} \\ &= \rho^* l^{*3} (l/l') (1/t^2 + 1/t + 1) / (1/t'^2 + 1/t' + 1) \end{aligned}$$

B. 相似変換における安定性の保存

マスタ系の運動方程式を演算子  $s_1$  を用いてラプラス変換して、その特性方程式を、

$$s_1^2 I + s_1 M^{-1} B + M^{-1} K = 0 \tag{B-1}$$

とし、その解を  $s_{1i}$  ( $i=1, \dots, 6$ ) とすると安定条件は、

$$Re(s_{1i}) < 0, \quad i=1, \dots, 6 \tag{B-2}$$

である。スレーブ系の運動方程式を演算子  $s_2$  を用いてラプラス変換して特性方程式を、

$$s_2^2 I + s_2 M'^{-1} B' + M'^{-1} K' = 0 \tag{B-3}$$

とし、その解を  $s_{2j}$  ( $j=1, \dots, 6$ ) とすると安定条件は、

$$Re(s_{2j}) < 0, \quad j=1, \dots, 6 \tag{B-4}$$

である。ところで速度の相似変換を行ったとき、各系の時間と動特性の関係は式 (28) より時間の比を  $t^* = t/t'$  ( $t^* > 0$ ) とすると、

$$t^* = s_2 / s_1 \tag{B-5}$$

また、定理 2 より、行列  $M, B, K, M', B', K'$  の各々の要素  $m, b, k, m', b', k'$  に対し、

$$k/m = k' / (m' t^{*2}), \quad b/m = b' / (m' t^*) \tag{B-6}$$

だから、(B-6) を (B-1) に施すとこの特性方程式は、

$$(t^* s_1)^2 I + (t^* s_1) M'^{-1} B' + M'^{-1} K' = 0 \tag{B-7}$$

これと (B-5) よりマスタ系を変換した系はスレーブ系と等価となる。一方、各系の解の関係は (B-5) より、

$$s_{2i} = t^* s_{1i}, \quad i=1, \dots, 6 \tag{B-8}$$

となり安定性は保存される。また、入出力条件の変換 (30) ではマスタ系とスレーブ系は明らかに等価となりこの場合も安定性は保存される。(証明終)