

バイスペクトルを用いる線形系推定の一方法[†]

館

暲*

An Estimation Method of a Linear Dynamic System by Means of Bispectrum Analysis

Susumu TACHI*

A method is proposed for estimating the system function of a time-invariant linear system without simultaneous recording of input and output waveforms, i. e., without using a cross-spectrum. Observed input and output of the system studied are contaminated with Gaussian noise, and the input and output noises are correlated. The input to the system is supposed to be composed of a periodic signal and Gaussian noise.

The auto-bispectrum of the observed input waveform and the auto-bispectrum of the observed output waveform are used to identify the phase characteristics of the system. In the identification the term corresponding to the system's transportation lag is eliminated and only the term expressing the phase dispersion among the frequency components is identified. The amplitude term can be estimated, but this term is interfered by the noise.

The merit of this method is that data can be obtained quickly under the optimum measuring conditions since no simultaneous measurement at two points and neither trigger nor synchronization of any type to process the signal are necessary.

This method may be useful, for example, for clinical studies, such as the diagnosis of arteriosclerosis, for which a catheter is too dangerous to use and instead a pressure sensitive transducer should be used externally at the sacrifice of accuracy, and the measurement should be done easily and quickly to diminish the pain of the patient.

The bispectra of arterial pressure waves at two points along an artery were calculated to determine the phase characteristics of the arterial-blood-pressure transfer function. A pre-

liminary experiment showed that the phase characteristics of the artery of the left arm resembled those of the right arm.

The phase characteristics of the arteries of arms are distinctly different from those of the aortas.

1. はじめに

よく知られているように、線形系のシステム関数は、入力に加わる雑音と出力に加わる雑音が無相関であれば、入力の自己パワースペクトルと入力と出力の相互パワースペクトルが知られば決定される。しかし、入力と出力とに加わる雑音は、たとえば観測雑音のように無相関とはみなせない場合が少なくなく、そのような場合には雑音は除去されない。雑音に相関があっても、それがガウス性であれば、入力のバイスペクトルと、入力と出力の相互バイスペクトルを用いれば、システム関数が得られることが知られている¹⁾。

ところで、相互のパワースペクトルや、相互のバイスペクトルを利用するためには、入力と出力を同時に記録しなければならないが、たとえば生体を特殊な計測器を用いて最良状態で測定する場合などのように、このことが測定に対して大きな制限となる場合がある。

本報告では、信号のバイスペクトルを利用して、系への入力信号が正規雑音に埋れた周期信号とみなせる場合に、測定を簡略化する試みである。すなわち相互スペクトルを用いずに、入力と出力のおおのの自己スペクトルと自己バイスペクトルとから系の特性を周期信号の基本周波数成分伝達の輸送遅れだけを除いて決定する方法である。

相互スペクトルを用いないので、入力と出力とでの記録を同時に行なう必要はなく、たとえば生体系のように最良の記録状態を2カ所で同時に得るのが困難であるような場合に有効である。

この測定法の原理を述べ、脈波を利用する動脈の状

† 第12回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭48・8)

* 機械技術研究所 東京都杉並区井草 4-12-1

* Mechanical Engineering Laboratory, Suginami-ku, Tokyo

(Received January 6, 1975)

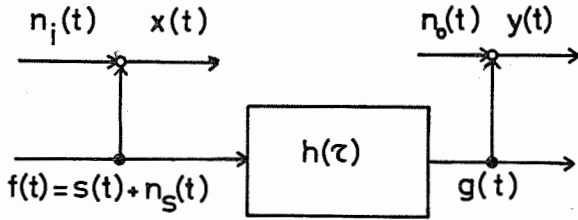


Fig. 1 Linear system to be identified. $x(t)$ and $y(t)$ are observed signals of input and output of the system, respectively. $s(t)$ represents the periodic component of the input. $n_s(t)$, $n_i(t)$, and $n_o(t)$ are Gaussian noises, and $n_i(t)$ and $n_o(t)$ are correlated.

態解析への応用例を示す。

2. 推定方法

Fig. 1 に示すように求めたい系への入力信号が、平均値0の正規雑音に汚された周期信号で、その入力と出力とを観測するさいに、入力と出力それぞれに、信号とは独立な平均値0の正規雑音加わるといふ系を考える。ただし $n_i(t)$ と $n_o(t)$ とは独立ではなく無相関でもない。この観測信号 $x(t), y(t)$ から系の重み関数 $h(\tau)$ 、あるいはそのフーリエ変換であるシステム関数 $H(f)$ を推定することを考える。周期信号をつぎのように表わす。

$$s(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos \{2\pi k f_0 (t - t_A) - \phi_k\} \quad (1)$$

$$A_k \neq 0$$

ただし、 t_A は観測の開始時刻による影響を表わしている。

$f(t) = s(t) + n_s(t)$ が $h(\tau)$ を通過することにより系の出力 $g(t)$ は、

$$g(t) = h(t) * f(t)$$

$$= B_1 \cos \{2\pi f_0 (t - t_B) - \phi_1\}$$

$$+ \sum_{k=2}^N B_k \cos \{2\pi k f_0 (t - t_B) - \phi_k\} + h(t) * n_s(t)$$

$$= \sum_{k=1}^N B_k \cos \{2\pi k f_0 (t - t_B) - \phi_k\} + h(t) * n_s(t)$$

$$\phi_1 = \phi_1 \quad (2)$$

となる。ただし、 $*$ は畳み込み積分を表わし、 t_B は基本周波数成分の時間遅れにより生じる項である。また $\phi_1 = \phi_1$ とおいて(2)式の右辺の第3式のようにまとめて表わしておく。そのとき、 ϕ_2, \dots, ϕ_N が周波数成分間の分散による影響である。そして、実際に観測される信号は入力側では、 $x(t) = f(t) + n_i(t)$ 、出力側では、 $y(t) = g(t) + n_o(t)$ である。 $x(t), y(t)$ を利用してシステム関数

$$H(kf_0) = \frac{B_k}{A_k} \exp [-j \{2\pi f_0 (t_B - t_A) + \phi_k - \phi_k\}] \quad (3)$$

を推定することを考えよう(注1)。

$x(t)$ のパワースペクトル密度は、正規雑音 $n_s(t)$ 、 $n_i(t)$ のパワースペクトル密度をそれぞれ、 $\Phi_{ss}(f)$ 、 $\Phi_{ii}(f)$ とすれば(注2)。

$$\Phi_{xx}(f) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N A_k^2 \delta(f - kf_0) + \Phi_{ss}(f) + \Phi_{ii}(f) \quad (4)$$

となり、入力信号と出力信号の相互パワースペクトル密度は、 $n_i(t)$ と $n_o(t)$ の相互パワースペクトル密度を $\Phi_{oi}(f)$ とすれば、

$$\Phi_{yx}(f) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \delta(f - kf_0) A_k B_k$$

$$\times \exp [-j \{2\pi k f_0 (t_B - t_A) + \phi_k - \phi_k\}]$$

$$+ H(f) \Phi_{ss}(f) + \Phi_{oi}(f) \quad (5)$$

となる。ここで $\delta(f)$ はディラックのデルタ関数を表わしている。

スペクトルのみでは $n_i(t)$ と $n_o(t)$ に相関があることと、入力側に観測のさい加わる雑音 $n_i(t)$ による $\Phi_{oi}(f)$ のため誤差が生じ、(4)、(5)式から

$$\frac{\Phi_{yx}(kf_0) df}{\Phi_{xx}(kf_0) df}$$

をつくっても、各周波数に対し(3)式の量とはならない。

バイスペクトルを利用すれば、 $n_i(t), n_o(t)$ に相関があっても系の特性が誤差を含まずに推定しうる。入力信号の観測値 $x(t)$ の自己バイスペクトル密度は、正規雑音のバイスペクトル密度は0であり、雑音成分と周期信号成分は独立であるから、周期信号のバイスペクトル密度と一致し、簡単な計算から²⁾

(注1) 入力が周期信号であるので、とびとびの周波数成分に対応する応答のみであるが、入力信号の成分に対する応答に最も興味があるのが普通であり、また、現実の系ではそれらの値から内挿してほかの値も求められよう。

(注2) 厳密には、

$$\Phi_{xx}(f) = \frac{1}{4} \sum_{k=-N}^N A_k^2 \delta(f - kf_0) + \Phi_{ss}(f) + \Phi_{ii}(f)$$

$A_0 = 0$ 、 $A_{-k} = A_k$ であるが、いま正の周波数部分のみに着目して、その部分のみを抽出したパワースペクトル密度、クロススペクトル密度を考えている。またバイスペクトル密度についても Fig. 2 の斜線部の領域にのみ着目している。パワースペクトル密度で負の周波数成分を正の周波数成分に重ねることは、バイスペクトル密度では行なえないので、パワースペクトル密度でもそれにあわせて行なっていない。

$$\begin{aligned} \Phi_{xxx}(f_1, f_2) &= \Phi_{sss}(f_1, f_2) \\ &= \frac{1}{8} \sum_k \sum_l A_k A_l A_{k+l} \delta(f_1 - kf_0) \delta(f_2 - lf_0) \\ &\quad \times \exp[-j(\varphi_k + \varphi_l - \varphi_{k+l})] \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、積和は Fig. 2 の斜線部Ωの領域で求める。

入力と出力の相互パイスペクトル密度は(注3),

$$\begin{aligned} \Phi_{yxx}(f_1, f_2) &= \frac{1}{8} \sum_k \sum_l B_k A_l A_{k+l} \delta(f_1 - kf_0) \delta(f_2 - lf_0) \\ &\quad \times \exp[-j\{\psi_k + \varphi_l - \varphi_{k+l} + 2\pi kf_0(t_B - t_A)\}] \end{aligned} \quad (7)$$

となり、(8)式で(3)式を推定できる。

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{yxx}(kf_0, lf_0)df^2}{\Phi_{xxx}(kf_0, lf_0)df^2} &= \frac{B_k}{A_k} \exp[-j\{(\psi_k - \varphi_k) + 2\pi kf_0(t_B - t_A)\}] \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $\Phi_{xxx}(kf_0, lf_0)df^2$ は $f_1 = kf_0, f_2 = lf_0$ のまわりの微少領域 df^2 に含まれるパイスペクトル

$$B\{kf_0 - df < f_1 \leq kf_0, lf_0 - df < f_2 \leq lf_0\}$$

を表わすものとする。

上記の方法は、雑音の影響を取除ける点で優れているが、相互パイスペクトルを利用するために入力信号と出力信号の同時記録をしなければならない。

さて、系の特性(3)式の位相項で、 $(t_B - t_A)$ は、上流で正弦波状に加わった基本周波数成分が、また正弦波状に位相を同じくして下流に現われるまでの時間で、そのとき、基本周波数成分の位相は $2\pi f_0(t_B - t_A)$ だけ変化する。つまり $2\pi kf_0(t_B - t_A)$ の項は基本周波数成分の輸送遅れにより生じる項であり、一方、 $\psi_k - \varphi_k$ が信号の各周波数成分間の分散で、これが系の特性の重要な部分を占めていると考えられる。

本方法では、自己パイスペクトルのみを用いて、 $\psi_k - \varphi_k$ を推定する。つまり、入力側でのパイスペクトル $\Phi_{xxx}(kf_0, lf_0)df^2$ を求めれば、その振幅項 $M_x(kf_0, lf_0)$ 、位相項 $P_x(kf_0, lf_0)$ は

$$\begin{cases} M_x(kf_0, lf_0) = \frac{1}{8} A_k A_l A_{k+l} \\ P_x(kf_0, lf_0) = \varphi_k + \varphi_l - \varphi_{k+l} \end{cases} \quad (9)$$

となる。出力側のパイスペクトル密度は、

$$\begin{aligned} \Phi_{yyy}(kf_0, lf_0) &= \frac{1}{8} \sum_k \sum_l B_k B_l B_{k+l} \\ &\quad \times \exp\{-j(\psi_k + \psi_l - \psi_{k+l})\} \end{aligned} \quad (10)$$

で、 $\Phi_{yyy}(kf_0, lf_0)df^2$ の振幅項と位相項は(11)式とな

(注3) 積和の領域は対称性から規定される領域とは一致しないが自己パイスペクトルの領域にあわせてある。

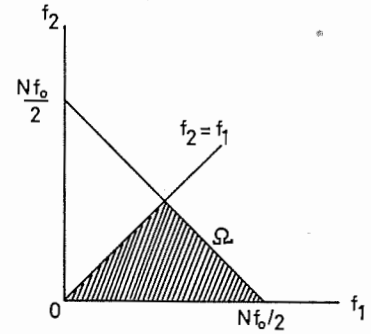


Fig. 2 Oblique lines indicate the area where the summation is taken.

る。

$$M_y(kf_0, lf_0) = \frac{1}{8} B_k B_l B_{k+l} \quad (11)$$

$$P_y(kf_0, lf_0) = \psi_k + \psi_l - \psi_{k+l}$$

(9)式で、 φ_1 は任意に設定して $\varphi_1 = 90$ 度として、

$$\begin{cases} \varphi_1 = 90 \text{ 度} \\ \varphi_k + \varphi_l - \varphi_{k+l} = P_x(kf_0, lf_0) \end{cases}$$

という漸化式から、 $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_N$ を求める。(11)

式で、 $\psi_1 = \varphi_1$ に設定して

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi_1 = 90 \text{ 度} \\ \psi_k + \psi_l - \psi_{k+l} = P_y(kf_0, lf_0) \end{cases}$$

という漸化式から、 $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_N$ が定まる。それらを利用して

$$\psi_k - \varphi_k \quad (k=2, 3, \dots, N)$$

が定まる。

このようにして、基本周波数成分に対する輸送遅れの相当分をほかの周波数成分から除外した周波数成分間の分散 $\psi_k - \varphi_k$ を雑音の影響を除去して求める。

また、信号 x と y について、周波数 f_0 のまわりの微少部分に含まれるパワー $\Phi(f_0)df$ を計算して、つぎの量を求める。

$$\hat{A}_1 = \sqrt{\Phi_{xx}(f_0)df}, \quad \hat{B}_1 = \sqrt{\Phi_{yy}(f_0)df}$$

\hat{A}_1, \hat{B}_1 をそれぞれ A_1, B_1 の推定値と考えて、

$$\hat{A}_k \hat{A}_l = \hat{A}_{k+l}, \quad \hat{B}_k \hat{B}_l = \hat{B}_{k+l}$$

の漸化式を用いて、 $\hat{A}_2, \dots, \hat{A}_N, \hat{B}_2, \dots, \hat{B}_N$ を求める。

しかし、 \hat{B}_k / \hat{A}_k をもって B_k / A_k の推定値とするためには \hat{A}_1, \hat{B}_1 に含まれる雑音を考慮せねばならない。

つまり、系のゲインは、この方法では雑音の影響を完全に除去した形で求めるわけにはいかない。

3. 応用例

人間の動脈を伝わる脈波は規則性をもった波形をしている。動脈にそって上流側を入力、下流側を出力とすれば線形性を仮定してその動脈の特性を調べることができる。犬や鶏のような動物で手術を行なってカテーテルを動脈に挿入して、入力と出力の分析を行な

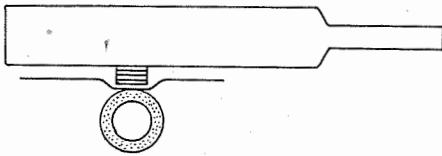


Fig. 3 Feeler pin of arterial pulse pick-up must be located just on the artery measured.

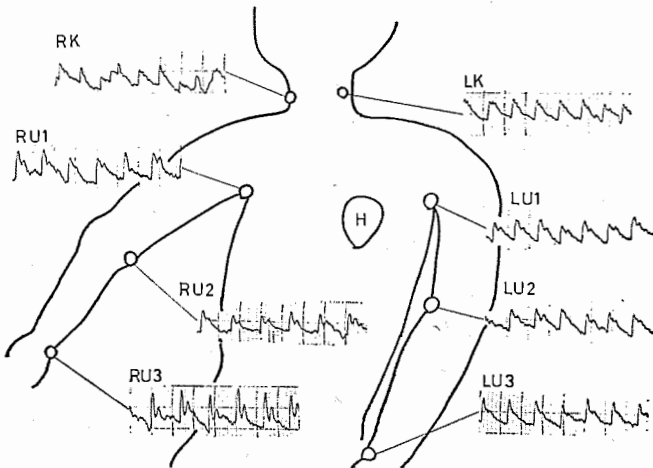


Fig. 4 Observed waveforms at various points of the body. These records are analyzed by means of the bispectrum analysis.

い、その系の伝達特性を求め、適当な動脈のモデルと対比させることにより、管の断面積、テーパ、管壁の弾性等の管の特性を推定することが行なわれている³⁾。

一方、人の動脈の特性を知ることは、その硬さから動脈硬化などの病変を知ることなどの臨床的な応用の立場からも非常に興味あることであるが、動物の場合と違い手術を施してカテーテルを挿入するわけにはいかない。臨床的な応用を考える場合には、データに皮膚伝達のための雑音に加わって不正確になることや、それ自身動脈の内圧自体を表わしているのではないといった事を犠牲にしても、皮膚の上から動脈の上に感圧素子をのせることにより測定することが望ましい。

その場合、変換器の先端を Fig. 3 に示すような状態で血管の上にちょうどよい状態でのるように医師が手で調節しなければならない。それは紙に書かれた記録を医師がみながら最良の状態を指により動脈の位置を確認して Fig. 3 の状態を作りだす努力をしながら求められる。そのようなことを2カ所同時に行なうのは時間の損失や人手の損失、また長時間になるために被験者にかかる苦痛などから考えて、非常に困難であるといわねばならない。記録された信号の信号処理に

少し時間をかけることにより、同時記録せずに必要とする系に関する情報が得られることが望ましい。

本節では、最終的には動脈硬化等の臨床的診断に利用することを目的として、バイスペクトルを用いて動脈の特性を調べた予備実験の結果を示す⁴⁾。

Fig. 4 に示すように被験者の左右の頸動脈部(LK, RK)、腕のつけ根(LU 1, RU 1)、肘の部分(LU 2, RU 2)、および手首の動脈部(LU 3, RU 3)から、SIEMENS 社製動脈パルスピックアップ L. No. 101288 により導出した脈波波形を CARDIREX 6T により増幅し、TEAC R-400 に録音した。記録は最良状態で8カ所同時に記録することが困難であったため各部位ごとべつべつに左側LKからLU3まで順に、のちに右側RKから順にRU3まで測定した。Fig. 4 に記録波形を各部位に対応させて示している。PDP-12によりAD変換しテープに出力後、FACOM 230-25にてバイスペクトル分析した。

バイスペクトルの推定法は、文献5)と同一であり、エイリアシングを防ぐため必要な場合には適当な前処理を行なった。サンプリング周波数は64回/secと32回/secを比べ、大きな差が認められなかったため32/sec回を利用した。またデータの長さは1,024点、セグメント平均法の分割数は8等分とした。バイスペクトルの振幅項はデータによりあまり安定しないが、位相項は同一被験者で同一状態とみなせるデータについては、プラスマイナス20度に十分おさまり、かなり安定していた。

Fig. 5 は左側でLK, LU 1, LU 2, LU 3から導出した脈波の分析結果で、各成分の位相を表わしている。0度ということが、その成分がcosの形で入っていることを表わし、90度、180度、270度はそれぞれsin, -cos, -sinにあたっている。LKやLU1のように比較的心臓に近い部位では基本周波数付近の成分はほぼsinの形で入っている。Fig. 6 は右側の各部位での結果で、Fig. 5と比較してもたとえばLU3とRU3が似ているとはいえない。これは心臓が左右の中心にないことによっている。しかし、LU1からLU3までの腕の動脈とRU1からRU3までの腕の動脈を比較すれば、それらの特性は類似していると推察される。

この腕の動脈の特性を調べるために、LU1(あるいはRU1)での波形を入力、LU3(あるいはRU3)での波形を出力と考え、第2節の方法で伝達特性の位相項のうち、基本周波数成分の輸送遅れの部分を除いた項を求めた。Fig. 7の細い線がその結果を表わし

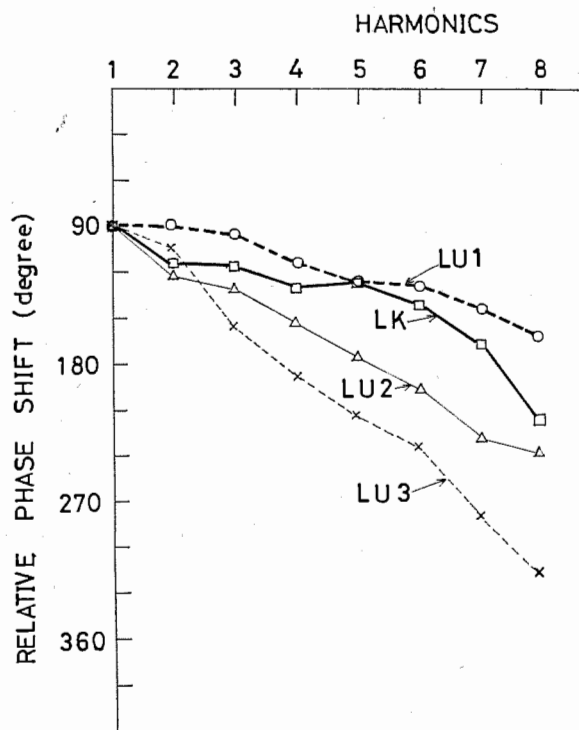


Fig. 5 Relative phases between the harmonic components of the observed waveforms. The abscissa shows the harmonic numbers, and the ordinate indicates the relative phase of the component. This figure shows the results of the left side of the body.

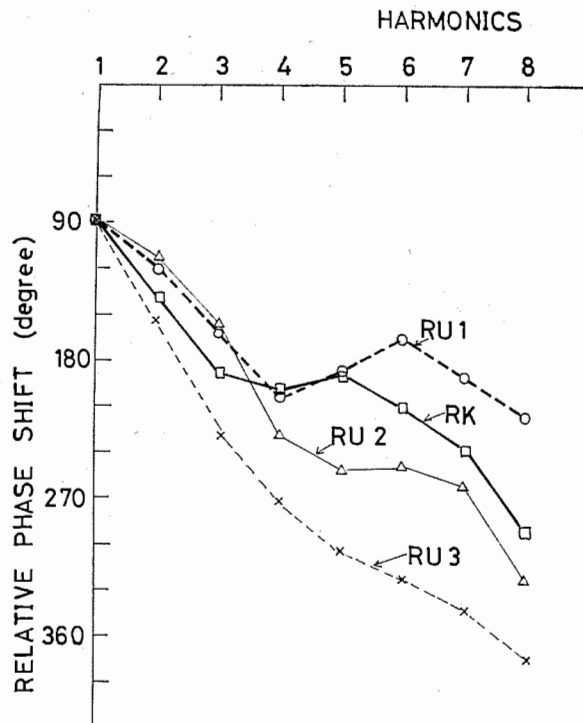


Fig. 6 Results of the right side of the body. The representation is the same as in Fig. 5.

ている。実線が左腕の動脈、点線が右腕の動脈の結果で、この二つの位相項のパターンが非常によく似ていることがわかる。

LU1 の点が心臓に近い一応ここを心臓の波形で入力と考え、LK, RK を出力とすれば、これは心臓から出る大動脈の特性を表わすとおおまかに考えることにする。このような太く柔かい管の位相項を Fig. 7 の太線で示す。実線がLKまでの、点線がさらに遠くRKまでの結果と考えられるとすれば、この二つの違いは、距離の差を表わしているわけで、その特性は類似していると考えられる。実際、Fig. 7 で、二つの位相項のパターンは類似している。そして、この位相項のパターンは、大動脈に比べて細く硬い腕の血管のパターンとははっきり異なっている。

4. おわりに

入力と出力を同時に記録することが測定上の大きな制限となる場合に、系への入力が雑音に埋れた周期信号とみなせれば、パイスペクトルを用いて、入出力に加わる観測雑音を除去して系の特性のうち、周波数成分間の分散を推定しうることを示し、動脈の推定の問題に応用した。

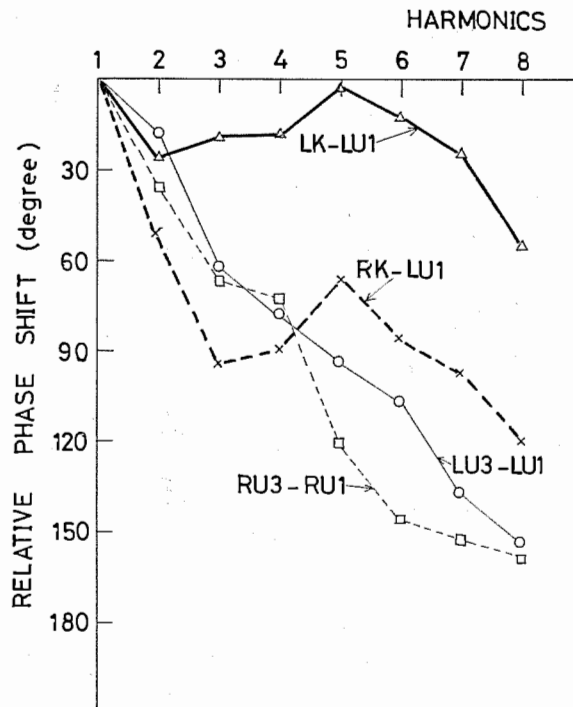


Fig. 7 Phase term of the system function of the artery (time lag according to the transportation is subtracted). The thick lines show the results for the aortas, and the thin lines indicate the results for the arteries of the left and right arms (solid and dotted, respectively).

動脈の実験をご指導くださった国立がんセンター病院高谷 治生理検査室医長に深く感謝するとともに、日頃ご指導いただく千葉大学工学部磯部 孝教授に謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) H. Akaike: On the use of non-Gaussian processes in the identification of a linear dynamic system, Research Memo. Institute of Statistical Mathematics, **3**, 269/276 (1966)
- 2) 鎔: バイスpekトル分析による雑音に埋れた周期信号の分離, 計測自動制御学会論文集, **9-6**, 729/738 (1973)
- 3) J.J. Strano, et al.: Measurement and utilization of in vivo blood-pressure transfer functions of dog and chicken aortas, IEEE Trans. Biomedical Engng., **BME-19**, 261/270 (1972)
- 4) 鎔, 高谷: バイスpekトルを用いる動脈脈波の解析, 第12回 ME学会予稿集, 287/288 (1973)
- 5) P.J. Huber, et al.: Statistical methods for investigating phase relations in stationary stochastic processes, IEEE Trans. Audio Electroacoust., **AU-19**, 78/86 (1971)

論文集論文に対する討論の募集

- ◇ 会員相互の知識の交換のため, 論文集には寄書欄を設けてあります。
- ◇ 新しい着想や学術上の所見はもとより, 実験結果または論文集の論文に対する質問・討論・意見などなるべく短くまとめて (0.5~2 ページ以内) ご投稿ください。
- ◇ 昭和51年1月10日までの投稿は次号に掲載されるよう努力します。