

講 座

バイオメカニズム研究者のための

バイスペクトル分析の理論と応用 (3)

館 障*

5. 2次相関関数とパワー
スペクトル密度の測定

5.1 2次の相関関数の推定

エルゴード性を満たす平均値0の定常な信号 $x(t)$ を、 $t=-T$ という時刻に測定し始め $t=T$ まで観測したとする。その時得た観測信号を $x_T(t)$ と書き表わす。すなわち、

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (30)$$

自己相関関数を求めるために観測信号から形式的に、有限な観測信号による推定値

$$\Phi_{xx}^T(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)x_T(t+\tau) dt \quad (31)$$

を求める。この集合平均値は $T \rightarrow \infty$ で $\Phi_{xx}(\tau)$ に収束し、分散は計算で求まり $T \rightarrow \infty$ になるにつれて0となるから、観測時間を無限に長くすれば

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_{xx}^T(\tau) = \Phi_{xx}(\tau) \quad (32)$$

従って、相関関数については有限長データから形式的に相関関数を求めれば、その推定値の真の相関関数からの誤差も求まり、データ長を伸ばすに従いが精度が確保されるわけである。

5.2 パワースペクトル密度の推定

例1の定義から明らかのように自己相関関数 $\Phi_{xx}(\tau)$ のフーリエ変換が信号 $x(t)$ のパワースペクトル密度 $\Phi_{xx}(f)$ を与える。それでは、その測定はいかにすればよいであろうか。まず考えられることは、例2式で与えられた有限時間の観測信号 $x_T(t)$ から例1式のごとく仮りの相関関数 $\Phi_{xx}^T(\tau)$ を求めて、これをフーリエ変換して推定値とする方法で

ある。
すなわち、

$$\Phi_{xx}^T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}^T(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (33)$$

例3式の期待値は $\Phi_{xx}(f)$ に $T \rightarrow \infty$ で収束するので問題はない。この推定値の分散が0に収束すれば問題ないのだが実は、そうはいかない。別の見方をすれば一般の関数 $\Phi_{xx}^T(\tau)$ については積分と極限とが交換できないのである。

つまり、

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \\ & \neq \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_{xx}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \\ & = \Phi_{xx}(f) \end{aligned} \quad (34)$$

この事実は次のことをも意味している。例3式を変形すれば、

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}^T(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}^T(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)x_T(t+\tau) \\ & \quad \times e^{-2\pi j f \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2T} \int x_T(t) e^{2\pi j f t} dt \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t') e^{-2\pi j f t'} dt' \\ &= \frac{1}{2T} X_T(f) X_T(-f) \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、

* 機械技術研究所 システム部

$$X_T(f) = F\{x_T(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-2\pi jft} dt \quad (36)$$

である。

(34)式の意味はとりもなおさず(35)式のような形、つまり有限長データをフーリエ変換して(35)式を求め、実のデータについてはその絶対値の2乗としてパワースペクトル密度を求める方法では真のパワースペクトル密度は推定できないことを意味する。(図6参照)

実際、過去に幾多の先人たちが不規則信号を解析するのに、有限長データをフーリエ変換して、その2乗をデータ長で割る形でペリオドグラム⁴⁾というものをつくり様々な現象に適応を試みている。そして、データ長を長くすればするほどそのペリオドグラムが細かい高い周波数の変動を持ち忘れてくるという珍現象にみまわれて苦労している。

それではどのようにすれば真のパワースペクトル密度の推定ができるのであろうか。これには大きく分けて二つの方法がある。

一つの方法は、不規則過程の根本に戻って集合平均としてパワースペクトル密度を推定

しようとする方法である。すなわち相関関数を(32)式のようにとって、

$$\Phi_{xx}^{TE}(\tau) = E\left[\frac{1}{2T} x_T(t) x_T(t+\tau)\right] \quad (37)$$

を求める。これのフーリエ変換がパワースペクトル密度の推定値であるから

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}^{TE}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\frac{1}{2T} x_T(t) x_T(t+\tau)\right] e^{-2\pi jf\tau} d\tau \\ &= E\left[\frac{1}{2T} X_T(f) X_T(-f)\right] \end{aligned} \quad (38)$$

(38)式の極限は真のパワースペクトル密度に収束するから

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_{xx}^{TE}(f) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{2T} X_T(f) X_T(-f)\right] \end{aligned} \quad (39)$$

とする方法である。

他の方法は、信号を観測する際、あるいは有限の観測信号から求めた仮りの相関関数を

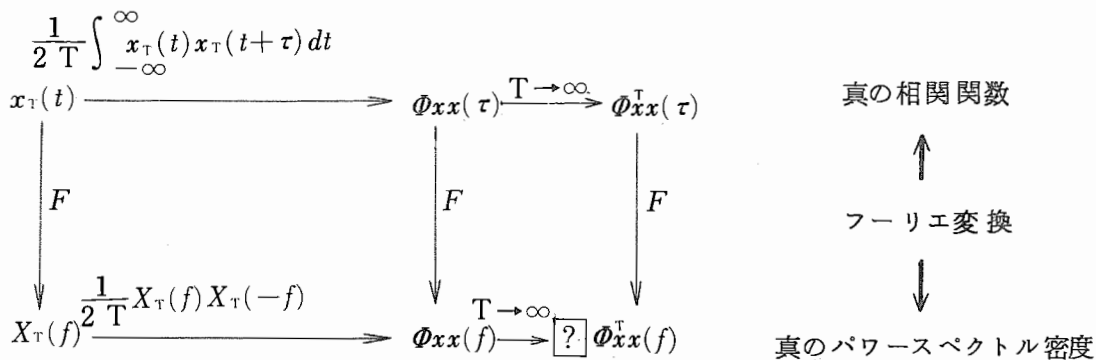


図6 相関関数とパワースペクトル密度測定における関係図

フーリエ変換する際に適当なウィンドウをかけてやるという方法である。(前者を *data window* $c(t)$ 、後者を *lag window* $W(t)$ と呼ぶ。)

適当なウィンドウ $W_T(\tau)$ を Φ_{xx}^T にかけて $\Phi_{xx}^T(\tau)W_T(\tau) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \Phi_{xx}^T$ に単純収束しかつ固定した可積分関数 $g \leq 0$ によって $\Phi_{xx}^T(\tau)W_T(\tau)$ が絶対値において抑えられる、すなわち

$$\begin{aligned} |\Phi_{xx}^T(\tau)W_T(\tau)| &\leq g(\tau), g(\tau) \geq 0 \\ \int g(\tau) d\tau &< \infty \end{aligned} \quad (40)$$

という条件をみたしてやる。それにより、

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int \Phi_{xx}^T(\tau)W_T(\tau)e^{-2\pi jf\tau} d\tau \\ = \int \Phi_{xx}^T(\tau)e^{-2\pi jf\tau} d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

とする方法である。このためのウィンドウは種々提案されており論文も多い。図7と表1にその例を示す。(文献3から引用)

ここで注意したいのは、データウィンドウ $c_T(t)$ とラグウィンドウ $w_T(t)$ との関係であり、またそのフーリエ変換 $W_T(f)$ との関係である。 $c_T(t)$ と $w_T(f)$ とは明らかに、

$$W_T(t) = \int C_T(t') \cdot C(t'+t) dt'$$

	ラグウィンドウ $W(t)$	$\xleftrightarrow[F^{-1}]{} F$	スペクトルウィンドウ $W(f)$
Do-nothing	$P_T(t) = \begin{cases} 1 - t & t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$		$2T \left(\frac{\sin 2\pi T f}{2\pi T f} \right)$
Bartlett	$q_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T} & t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$		$T \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2$
Parzen	$\frac{3}{T} q \frac{T}{2}(t) * q \frac{T}{2}(t)$		$\frac{3}{4} T \left(\frac{\sin \frac{\pi T f}{2}}{\frac{\pi T f}{2}} \right)^4$
Tukey	$\frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi}{T} t) P_T(t)$		$\frac{\sin(2\pi T f)}{2\pi f(1 - 4T^2 f^2)}$
Hamming	$(0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi}{T} t) P_T(t)$		$\frac{(0.54 - 0.32T^2 f^2) \sin 2\pi T f}{2\pi f(1 - 4T^2 f^2)}$
Minimum m_2	$[\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{T} t + (1 - \frac{ t }{T}) \cos \frac{\pi}{T} t] P_T(t)$		$4T \frac{1 + \cos 2\pi T f}{\pi^2 (1 - 4T^2 f^2)^2}$

表1 各種ウィンドウの実現

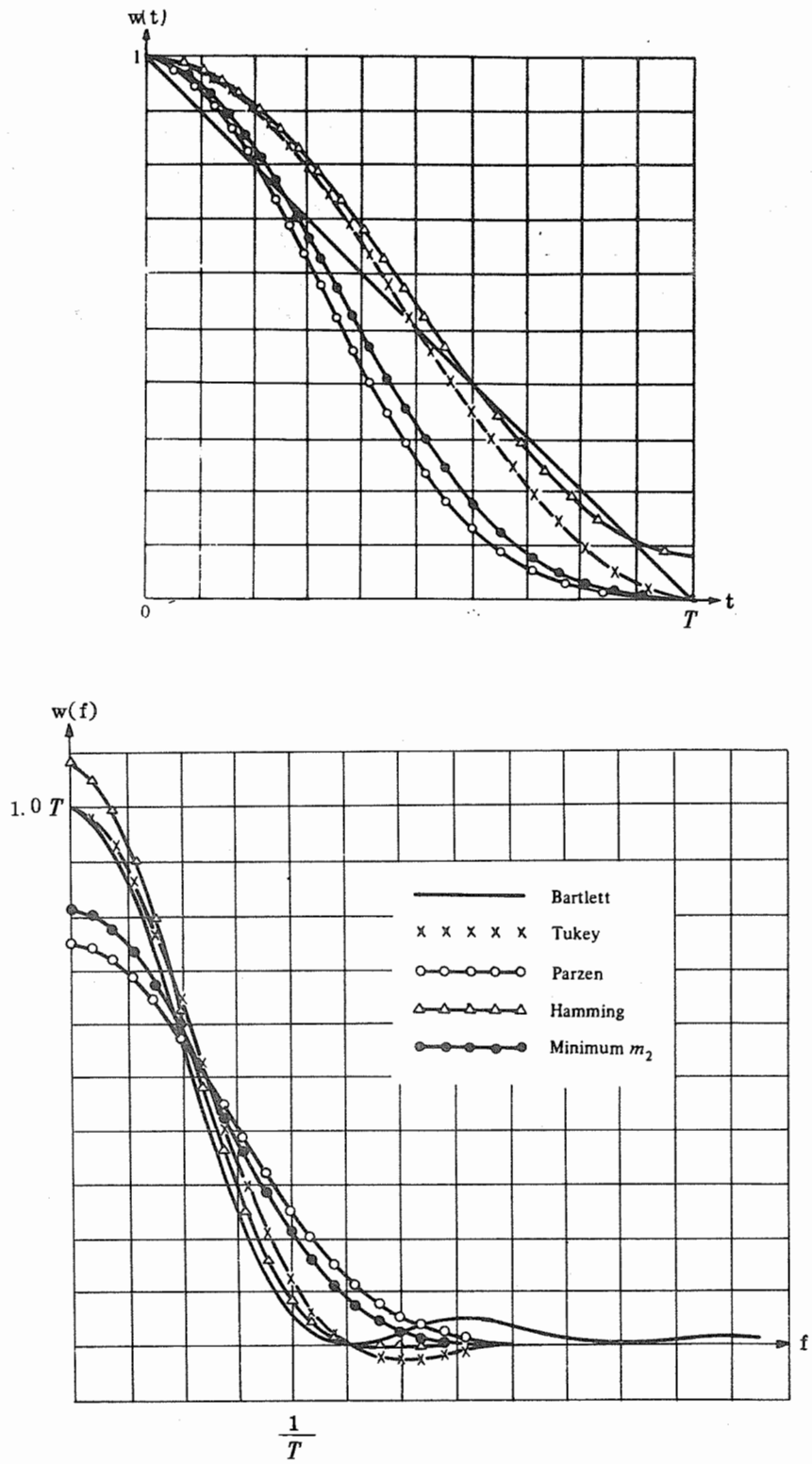


図7 ラグウィンドウとスペクトルウィンドウ

スペクトルウィンドウ $W_T(f)$ は、

$$W_T(f) = F\{W_T(t)\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} W_T(t) e^{-2\pi jft} dt \quad (42)$$

である。相関関数にラグウィンドウ $W_T(\tau)$ をかけるということはフーリエ変換における(5)式の関係から

$$F[\Phi_{xx}^T(\tau) W_T(\tau)] \\ = F[\Phi_{xx}^T(\tau)] * F[W_T(\tau)] \\ = \Phi_{xx}^T(f) * W_T(f) \\ = \int \Phi_{xx}^T(f') W_T(f-f') df' \quad (43)$$

となっている。

すなわち、これはそのままでは $\Phi_{xx}(f)$ に収束しない $\Phi_{xx}^T(f)$ に周波数上で適切な $W_T(f)$ というウィンドウをたたみこみ積分する(中心点のまわりで重みつき平均し、その中心を順次移動することにより滑らかにして、真のスペクトルに収束させているわけである。

見方を変えれば、 $x_T(t)$ という信号を観測したということは、信号に矩形波のデータウィンドウをかけて観測したことを意味する(図3(4) Do-nothing window という)。その場合には、ラグウィンドウとしては図3(9)のような三角波状の窓を利用したことに相当し、スペクトル上では $\frac{\sin^2 2\pi T f}{\pi^2 f^2}$ という形のウィンドウをたたみこみ積分することになっている。明らかにこの窓は中心以外によけいな周波数の部分に山があり(サイドローブという)、それらのよけいな周波数の影響がまじりこんだり、それらの周波数への上げが生じたりする。このような形では真のスペクトルが推定できないことは明白である。そして T を長くすれば、サイドローブの現われる位置は $\frac{1}{T}$ のオーダーで中心に近づいてくる。従ってこの観測法ではデータ長を長くすればするほど、スペクトルが荒れてくることが予想される。これが、ペリオドグラムで先人が苦勞したこと現代の解釈である。図7

の Bartlett を除く各ウィンドウでは、サイドローブを除いて真のスペクトルに近づける工夫がこらされている。

また歴史的には、まず $x_T(t)$ を測定し、それをフーリエ変換して $X_T(f)$ を求め、それから $\frac{1}{2T} |X_T(f)|^2$ としてスペクトルを求めようとして失敗し、相関関数を介在させてそれに適当なラグウィンドウをかけてスペクトルを求める方法が主流となり、最近の高速フーリエ変換 [FFT (Fast Fourier Transform)] 手法の発展⁵⁾により、 $\frac{1}{2T} |F\{c_T(t) x_T(t)\}|^2$ として $G(f)$ の形でスペクトル窓をあらかじめ入れてしまい推定する方法に発展的に戻るといふ具合にも捉えることができよう。

6. 3次相関関数と

バイスペクトル密度の測定

6.1 バイスペクトルの推定法と解釈

2次の相関関数とそのフーリエ変換であるパワースペクトル密度で行なったことと全く同様の操作で3次相関関数とバイスペクトル密度が推定される。

観測された信号 $x_T(t)$ から形式的に

$$\Phi_{xxx}^T(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t + \tau_1) x_T(t + \tau_2) dt \quad (44)$$

を求める。

3次相関関数は極限移項により

$$\Phi_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t + \tau_1) x_T(t + \tau_2) dt \quad (45)$$

従って、観測時間を無限に長くすれば真の相関関数が得られる。

バイスペクトル密度は、そのフーリエ変換で、

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t + \tau_1) x_T(t + \tau_2) dt \right\} e^{-2\pi j(f_1 \tau_1 + f_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (46)$$

であるが、積分と極限は交換できないので、

$$\begin{aligned} \Phi_{xxx}^T(f_1, f_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xxx}^T(\tau_1, \tau_2) e^{-2\pi j(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)} \\ &\quad d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{1}{2T} X_T(f_1) X_T(f_2) X_T(-f_1 - f_2) \quad (47) \end{aligned}$$

を単に極限移項しても真のバイスペクトル密度にはならない。 $\Phi_{xxx}^T(f_1, f_2)$ を集合平均してから極限移項して、

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} X_T^*(f_1 + f_2) X_T(f_1) X_T(f_2) \right] \quad (48)$$

として求めることになる。^{註3)}

ただし*は複素共役を示す。

つまり、バイスペクトルは信号のフーリエ成分の内、独立な二つの周波数 f_1 と f_2 の成分と $f_1 + f_2$ なる周波数を持つ成分の複素共役量を掛け合せて、その集合平均を作ることにより求められる。これは、信号が含んでいる f_1 、 f_2 、 $f_1 + f_2$ という三つの成分間の関係を表わす量であり、 f_1 、 f_2 という二つの独立な周波数と、式の左辺には現われない $f_1 + f_2$ という周波数が関係している。

このようにして得られるバイスペクトルは、各周波数成分(平均値は0)が互いに独立であれば、積の平均は平均値の積となることから、その値が0となる。値が0でないのは三つの周波数成分がすべて関連している時で、従って、バイスペクトルは、周波数 f_1 、 f_2 、 $f_1 + f_2$ の三つの成分の間の従属性を示す量と考えることができる。波形が一見不規則であっても、バイスペクトルが0でない信号は、不規則ななかにも各周波数成分間に従属性があり、そのために波形に「くせ」が現われるのである。

さて、実際にバイスペクトル密度を推定するのに、(47)式にもとづいて3次の相関関数の推定を行ない、それをフーリエ変換して求める方法は相関関数の計算に膨大な時間が掛り能率が悪い。(48)式を利用して信号のフーリエ変換をFFTのアルゴリズムを使って求め、

その周波数成分三つ組の集合平均として推定するのがよい。具体的な方法としては、大別して次の三つが行なわれている。

(1) 定常でエルゴード性を満足する1回の連続した観測値のみ得られている場合、観測時間を長くすれば、信号のフーリエ変換の周波数成分で周波数的に近いところにある成分は互いに独立になる。この事を利用して、それらの成分を周波数領域で移動平均して、集合平均にかえバイスペクトル密度を推定する。

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{xxx}(f_1, f_2) &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_T \\ &\quad (f_1 - f') X_T(f_2 - f'') X_T^*(f_1 + f_2 \\ &\quad - f' - f'') W(f', f'') df' df'' \quad (49) \end{aligned}$$

ただし

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(f', f'') df' df'' = 1$$

である。

(2) 同一母集団からの実現値が多数得られる場合、定常とみなせる観測信号を可能な限りとり、仮りのバイスペクトルを、各々の観測信号について求め、それらを集合平均する。必要とする周波数分解能率以上のデータがあれば、この場合に(1)の方法を併用してもかまわない。

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{xxx}(f_1, f_2) &= \frac{1}{TK} \sum^k X_T(f_1)^k X_T(f_2) \\ &\quad \times X_T^*(f_1 + f_2) \quad (50) \end{aligned}$$

(3) 1回の連続した観測値のみが得られている場合で計算機の記憶容量に余裕があれば計算時間を短縮するために連続したデータを細分して、それらのデータの各々が同一の母集団からの出現値であると考えて(2)の方法を利用する。

(1)、(2)、(3)のいずれかの方法で推定するわけであるが、デジタル計算機で計算するための具体的な手順については6.3で述べる。

また、デジタル計算機を用いずに特殊なハードウェアを作成した例としては、乱数電圧法による3次相関器⁶⁾、超音波回析格子を用いた光学的3次相関器⁷⁾、フィルムの重ね合わせを巧みに利用した1次元信号の光学的3次相関器⁸⁾、ヘテロダイン法によるアナログ型バイスペクトル分析器⁹⁾、が報告されてい

る。

最後に、このようにして推定あるいは測定されたバイスペクトルは複素量である事に注意したい。

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \Phi_{xxx}^R(f_1, f_2) - j \Phi_{xxx}^I(f_1, f_2) \quad (51)$$

と表わすとすれば、

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = A e^{-j\theta} \quad (52)$$

と書くこともできる。ただし、

$$A = \sqrt{(\Phi_{xxx}^R)^2 + (\Phi_{xxx}^I)^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\Phi_{xxx}^I}{\Phi_{xxx}^R} \quad (53)$$

である。この A をバイスペクトルの振幅項 (modulus)、 θ を位相項 (phase) と呼んでいる。

また、次の複素量はバイコヒーレンス (Bicoherence) と呼ばれている無次元複素量である。

$$\text{bic}(f_1, f_2) = \frac{\Phi_{xxx}(f_1, f_2) df^2}{\sqrt{\Phi_{xx}(f_1) df \Phi_{xx}(f_2) df \Phi_{xx}(f_1+f_2) df}} \quad (54)$$

バイスペクトル密度の次元 $[\Phi_{xxx}]$ は、信号の次元を [ボルト] として

$$[\Phi_{xxx}] = [\text{ボルト}]^3 / [\text{周波数}]^2 = [\text{ボルト}]^3 / [\text{時間}]^2 \quad (55)$$

である。df として無次元化のための単位周数あるいは $1/[\text{単位時間}]$ をつけ全体としてバイコヒーレンスは無次元量となっている。ただし、その絶対値は -1 と 1 の間に正規化されているわけではない。

6.2 バイスペクトルの対称性と推定領域

信号 $x(t)$ が定常であることから、3次相関関数は次のような対称性をもつ。

$$\begin{aligned} \Phi_{xxx}(\tau_1, \tau_2) &= \Phi_{xxx}(\tau_2, \tau_1) \\ &= \Phi_{xxx}(-\tau_2, \tau_1 - \tau_2) \\ &= \Phi_{xxx}(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2) \\ &= \Phi_{xxx}(-\tau_1, \tau_2 - \tau_1) \\ &= \Phi_{xxx}(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1) \end{aligned} \quad (56)$$

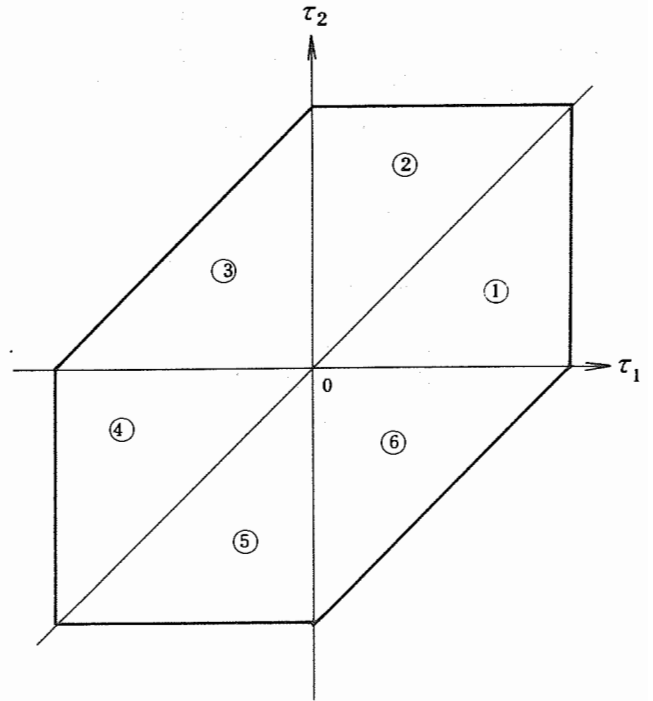


図 8 3次相関関数の対称性

従って、3次相関関数の計算は図8の六つの領域のいずれかで行なえばよいことになる。

バイスペクトルは3次相関関数のフーリエ変換であるから、(56)式を用いて次のような対称性のあることがわかる。

$$\begin{aligned} \Phi_{xxx}(f_1, f_2) &= \Phi_{xxx}(f_2, f_1) \\ &= \Phi_{xxx}(f_1, -f_1 - f_2) \\ &= \Phi_{xxx}(-f_1 - f_2, f_1) \\ &= \Phi_{xxx}(f_2, -f_1 - f_2) \\ &= \Phi_{xxx}(-f_1 - f_2, f_2) \end{aligned} \quad (57)$$

(57)式の関係と

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \Phi_{xxx}^*(-f_1, -f_2) \quad (58)$$

等の複素共役の関係から、バイスペクトルは (f_1, f_2) 平面の12個の領域について対称性をもつことが知られる。信号 $x(t)$ に含まれる最高周波数が f_{max} であるとするれば図9に示した12の3角形の部分のいずれかの範囲でバイスペクトルを計算すれば十分である。なお、各3角形の面積はすべて等しくなっている。これはパワースペクトルが信号のパワー $E[x^2]$ に対する各周波数成分の寄与を表わしているのに対して、(59)式の関係式から分るように、バイスペクトルは $E[x^3]$ に対する寄与成分を表わしているからである。

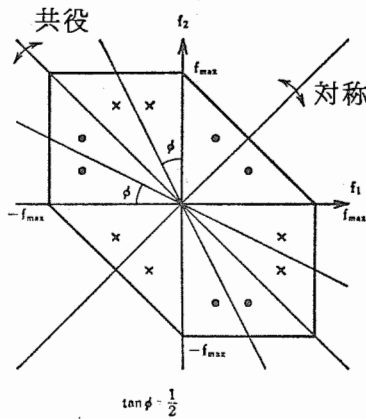


図9 バイスペクトルの対称性

$$E[x^3] = \Phi_{xxx}(0, 0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xxx}(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (59)$$

6.3 デジタル計算機によるバイスペクトル推定手続

バイスペクトル計算のための手順を以下に簡単にまとめて述べる。

- 1) 信号 $x(t)$ を Δt 間隔で N 個読みとる。
FFTを利用する関係上 $N=2^n$ とし Δt を 2^{-n} に比例した値にしておくと都合がよい。勿論信号に含まれる最高周波数成分を f_{max} とすれば $\Delta t \leq \frac{1}{2f_{max}}$ としておく。

N 個のデータ列を K 組用意する。

$${}^k x_i = x(i \Delta t) \quad i=0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$k=1, 2, \dots, K \quad (60)$$

- 2) 必要に応じて各データ列から、それぞれの平均値を差し引く、不必要な周波数成分を除く、信号を切り出した際の観測窓を矩形波状でなくす(テーパリング)、などの前処理を行なう。
- 3) FFTを利用して、離散型フーリエ変換を行ない、 X_q を求める。

$${}^k X_q = {}^k X(q \Delta f)$$

$$= \Delta t \sum_i x_i e^{-j^2 \pi (q/N) i} \quad (61)$$

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \Delta t}, \quad 0 \leq q \leq \frac{N}{2} \quad (62)$$

- 4) (f_1, f_2) 点におけるバイスペクトルを求めるには、バイスペクトルが一定とみなせる範囲で、次のようなウィンドウ付きの平均化をすればよい。

$$\hat{\Phi}_{xxx}(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f) = \sum_{l_1+l_2} W(l_1, l_2)$$

$$\times \frac{1}{2} \frac{{}^k X_{q_1+l_1} {}^k X_{q_2+l_2}}{q_1+q_2+l_1+l_2} \quad (63)$$

ただし

$$q_1, q_2 = 0, M, 2M, \dots < \frac{N}{2},$$

$$q_1 + q_2 < \frac{N}{2}$$

$$M = 2L + 1 \quad (L \text{ は } 0 \text{ か自然数})$$

$$\sum_{l_1, l_2} W(l_1, l_2) = 1, \quad X_{-l} = X_l^*, \quad X_{\frac{N}{2}+l} = X_{\frac{N}{2}-l}^*$$

ウィンドウ $W(l_1, l_2)$ としては、スペクトルのウィンドウを2次元に拡張すれば、それがそのまま適用できるわけであるが、次の二つが比較的簡単で多用される。

$$I) W(l_1, l_2) = \begin{cases} \frac{1}{M^2} & |l_1| \leq L, |l_2| \leq L \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (64)$$

$$II) W(l_1, l_2) = \begin{cases} \frac{4}{3M^2+1} & |l_1| \leq L, |l_2| \leq L \\ & |l_1+l_2| \leq L \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (65)$$

5) 最後に、K組のデータについて平均する。

$$\hat{\Phi}_{xxx}(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\Phi}_{xxx}(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f) \quad (66)$$

ただし、(63)、(66)の平均化は、必要に応じて片方だけ (K=1 または M=1) にしてもよいのは 6.1 に述べたとおりである。

6) パワースペクトルは、上と同じ M、q を用いて次のように計算できる。

$$\hat{\Phi}_{xx}(q \Delta f) = \frac{1}{2MT} \sum_{k=1}^K \sum_{l=-L}^L |X_{q+l}|^2 \quad (67)$$

7) バイコヒーレンスは 5) と 6) から

$$\hat{b}ic(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f) = \frac{\hat{\Phi}_{xxx}(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f)}{\sqrt{\hat{\Phi}_{xx}(q_1 \Delta f) \hat{\Phi}_{xx}(q_2 \Delta f) \hat{\Phi}_{xx}((q_1+q_2) \Delta f)}} \quad (68)$$

として推定される。

なお、 $\hat{\Phi}_{xx}$ 、 $\hat{\Phi}_{xxx}$ は、厳密には Φ_{xxdf} 、 Φ_{xxxdf}^2 が推定されていることになることに注意されたい。

註 3) 厳密には、パワースペクトルとバイスペクトルは定常確率過程 $x(t)$ の Fourier-Stieltjes 表示の成分 $dX(f)$ を使って次のように定義される。 $x(t)$ を

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi jft} dX(f) \quad (C1)$$

と表わす $dX(f)$ を使えば、パワースペクトルは、

$$\Phi_{xx}(f) df = E[dX(-f) dX(f)] \quad (C2)$$

バイスペクトルは、

$$\begin{aligned} \Phi_{xxx}(f_1, f_2) df^2 \\ = E[dX(-f_1-f_2) dX(f_1) dX(f_2)] \end{aligned} \quad (C3)$$

クロスバイスペクトル密度は、二つの定常確率過程

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi jft} dX(f) \\ g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi jft} dY(f) \end{cases} \quad (C4)$$

の $dX(f)$ 、 $dY(f)$ を使って、例えば、

$$\begin{aligned} \Phi_{xxg}(f_1, f_2) df^2 \\ = E[dX(-f_1-f_2) dX(f_1) dY(f_2)] \end{aligned} \quad (C5)$$

と表わされる。

参 考 文 献

- 3) 例えば、R. B. Blackman and J. W. Tukey, "The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering, New York, Dover, 1959. Athanasios Paponlis, "Signal Analysis," McGraw-Hill Book Company, 1977.
- 4) Arthur Schuster, "The Periodogram and its Optical Analogy," Proc. Roy. Soc., Ser. A77, PP. 136-140, 1906.
- 5) 例えば、IEEE Trans. Audio and Electronics, Vol. AU-15, 1967; Vol. AU-17, 1969. E. Oran Brigham, "The Fast Fourier Transform", Prentice-Hall, Inc., 1974.

- 6) 桐山、佐藤、鈴木、浜田、“乱数電圧法を用いた3次相関器。”計測自動制御学会論文集、Vol. 4, PP. 295-303, 1968.
- 7) 佐藤、上田、“超音波と光の相互作用とその制御。”計測と制御、Vol. 7, PP. 675-682, 1968.
- 8) S. Fujimura, K. Ohshima, and I. Yamada, “Optical 3rd-order Autocorrelator,” Optics Communications, Vol. 4, PP. 362-365, 1972. または、“光学的3次相関器。”第10回SICE予稿集、PP. 597-598, 1971.
- 9) 上野、“バースペクトル分析器の試作。”第11回SICE予稿集、PP. 595-596, 1972.