講　座

バイオメカニズム研究者のための バイスペクトル分析の理論と応用（4）

舘　　　暲*

7. バイスペクトル推定値の誤差

7.1　ディジタル計算機による推定の誤差

ディジタル計算機を用いてバイスペクトルを求める際に、次のような誤差が考えられる。

(i)　信号の量子化誤差

(ii)　サンプリング誤差（エイリアシング）

(iii)　有限長のデータを用いたことによる統計的なばらつき

この内、(i)、(ii)については、不規則信号の処理を行う場合に、極端に粗い量子化を行ったり、大きなサンプリング周期をとらない限り、測定値に及ぼす影響は少ない（エイリアシングに関しては文献10を参照されたい）。測定値の誤差の主な原因はデータが有限長であることによる統計的なばらつきである。以下、上野らの方法[11]に従ってその大きさを推定してみよう。

バイスペクトル推定値の分散σ^2は次の量である。

$$\sigma^2 = E[\hat{\Phi}(q_1\Delta f, q_2\Delta f)\hat{\Phi}^*(q_1\Delta f, q_2\Delta f)] - |E[\hat{\Phi}(q_1\Delta f, q_2\Delta f)]|^2 \quad \cdots\cdots\cdots (69)$$

いま、信号がガウス性で、そのバイスペクトルは0であるとして、(63)式により推定値を求めるとして計算すると、

$$\sigma^2 = E[\sum_{\ell_1}\sum_{\ell_2}\sum_{\ell_1'}\sum_{\ell_2'} W(\ell_1, \ell_2)W(\ell_1', \ell_2') \times \frac{1}{T^2} X_{q_1+\ell_1} X_{q_2+\ell_2} X^*_{q_1+q_2+\ell_1+\ell_2} X^*_{q_1+\ell_1'} \times X^*_{q_2+\ell_2'} X_{q_1+q_2+\ell_1'+\ell_2'}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (70)$$

となる。$q_1 \fallingdotseq q_2$とし、W（ℓ_1，ℓ_2）による平均化の及ぶ範囲は（$q_1\Delta f, q_2\Delta f$）のごく近傍に限ることにする。さらに、Tが十分大きいときには、

$$E[\frac{1}{T}X(q\Delta f)X(q'\Delta f)] = \begin{cases} \Phi_{xx}(q\Delta f) & q+q'=0 \\ 0 & q+q' \fallingdotseq 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (71)$$

となること、X_qのガウス性からその6次モーメントが2次モーメントの積和で表わされることを考慮すると、(70)は(72)のようになる。

$$\sigma^2 = E[\sum_{\ell_1}\sum_{\ell_2} W^2(\ell_1, \ell_2)\ T\Phi_{xx}\{(q_1+\ell_1)\Delta f\} \times \Phi_{xx}\{(q_2+\ell_2)\Delta f\}\Phi_{xx}\{(q_1+q_2+\ell_1+\ell_2)\Delta f\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (72)$$

さらに、ℓ_1，ℓ_2の平均化の及ぶ範囲でパワースペクトルは一定であるとみなせば、次のようになる。

$$\sigma^2 = \{E[\sum_{\ell_1}\sum_{\ell_2} W^2(\ell_1, \ell_2)]\} N\Delta t\, \Phi_{xx}(q_1\Delta f) \times \Phi_{xx}(q_2\Delta f)\Phi_{xx}\{(q_1+q_2)\Delta f\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (73)$$

次節(66)式で推定したバイスペクトル推定値の分散は、(64)，(65)式で示したⅠ、Ⅱのウィンドウのいずれを用いるかによって次のようになる。K組のデータについて平均化しているので

$$\sigma_{\mathrm{I}}^2 = \frac{N\Delta t}{KM^2}\Phi_{xx}(q_1\Delta f)\Phi_{xx}(q_2\Delta f) \Phi_{xx}\{(q_1+q_2)\Delta f\} \quad \cdots\cdots\cdots (74)$$

$$\sigma_{\mathrm{II}}^2 = \frac{4N\Delta t}{K(3M^2+1)}\Phi_{xx}(q_1\Delta f)\Phi_{xx}(q_2\Delta f) \Phi_{xx}\{(q_1+q_2)\Delta f\} \quad \cdots\cdots\cdots (75)$$

さらに、もう少し一般的なウィンドウについて考えてみよう。平均化の及ぶ範囲が等価的にⅠのウィンドウと同じとみなせる場合には、バンド幅B^2の中に約$(B/\Delta f)^2 = (TB)^2$個の点が含まれていることになる。従ってバンド幅Bの均等な重みを持つ次のウィンドウ

* 機械技術研究所システム部

$$W(\ell_1, \ell_2) = \frac{1}{(TB)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (76)$$

に対しては、

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{TB^2}\Phi xx(q_1\Delta f)\Phi xx(q_2\Delta f)$$
$$\Phi xx\{(q_1+q_2)\Delta f\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (77)$$

ただし(77)式は、K回の重ねあわせを行っていない場合の分散でありK回の重ね合わせを行えば1/Kになることは明らかである。

この(77)式の結果を別の観点から多少直観的に分りやすい形で検証してみよう。

7.2 バイスペクトルの測定系

検証に先き立ち図10のブロック線図で示した系によりバイスペクトルの測定が行えることを確かめておこう。[12] 各フィルタのインパルス応答を、$g_1(t)$、$g_2(t)$、$g_3(t)$と表わし、各フィルタの出力x_1、x_2、x_3の積をT時間平均したものをmとすると注4)

$$m = \frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)x_2(t)x_3(t)dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T dt\prod_{i=1}^{3}\{\int_0^\infty g_i(\lambda_i)x(t-\lambda_i)d\lambda_i\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (78)$$

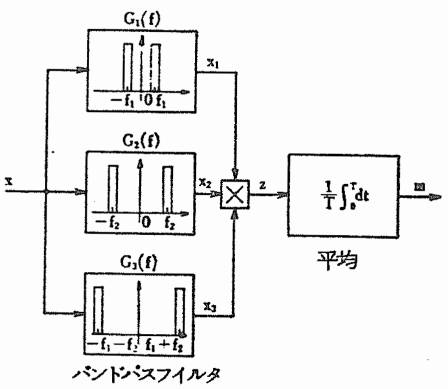

図10 バイスペクトル測定系

ここで、T時間平均で求めた3次相関関数$\Phi^T_{xxx}(\tau_1, \tau_2)$を用いれば、Tが十分大きい時には、

注4) フイルタとしての物理的なイメージを与えるため時間は0〜Tとしている。従つて、

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$ とする。

$$\Phi^T_{xxx}(-\lambda_1+\lambda_3, -\lambda_2+\lambda_3)$$
$$\fallingdotseq \frac{1}{T}\int_0^T x(t-\lambda_1)x(t-\lambda_2)x(t-\lambda_3)dt \quad \cdots\cdots\cdots (79)$$

とすることができ、従って

$$m = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda_1)g_2(\lambda_2)g_3(\lambda_3)$$
$$\times \Phi^T_{xxx}(-\lambda_1+\lambda_3, -\lambda_2+\lambda_3)d\lambda_1 d\lambda_2 \lambda_3$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(f_1)G_2(f_2)G_3(-f_1-f_2)$$
$$\times \Phi^T_{xxx}(f_1, f_2)df_1 df_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (80)$$

ここで、

$$G_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(t)e^{-j2\pi ft}dt \cdots\cdots (81)$$

いま、各バンドパスフィルタの周波数特性を図11の(a) Iのようにする。つまり、G_1, G_2のバンド幅をB, G_3のバンド幅を2Bとすると、f_1, f_2についての積分範囲は図11(b) Iに示す正方形の範囲となる。別の選び方をして、図11の(a) IIのように、三つのバンド幅がいずれもBとすれば、f_1, f_2についての積分範囲は図11(b) IIの6角形の範囲となる。図11(b)にはf_1, f_2の正の部分のみを示してあるが、実際には原点に対称な部分にも同じ形の積分範囲が存在している。平均化の及ぶ範囲の面積は図11(b) Iの場合B^2(バイスペクトル測定の実効的バンド幅)となり、その範囲内ではバイスペクトルが一定の値$\Phi xxx(f_1, f_2)$をとると考えるわけである。この時、測定系の出力mはバイスペクトル$\Phi xxx(f_1, f_2)$の推定値$\hat{\Phi} xxx(f_1, f_2)$を与える。

$$m_I = B^2[G_1(f_1)G_2(f_2)G_3(-f_1-f_2)$$
$$\times \hat{\Phi} xxx(f_1, f_2) + G_1(-f_1)G_2(-f_2)$$
$$\times G_3(f_1+f_2)\hat{\Phi} xxx(-f_1, -f_2)]$$
$$= 2B^2A_1A_2A_3\mathrm{Re}[\hat{\Phi} xxx(f_1+f_2)] \cdots (82)$$

ただし、各フィルタの通過帯域内では、

$$G_i(f) = A_i e^{j\angle G_i(f)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (83)$$

と表わされ、さらにフィルタ間の位相は、

$$\angle G_1(f_1) + \angle G_2(f_2) = \angle G_3(f_1+f_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (84)$$

を満たすものとする。なお、Re[ ]は実数部を表わす。

一方、図11(b) IIの場合については、$3B^2/4$

の範囲に対して平均化が行われることになり、上記と同一のフィルタの条件（84）のもとでは、

$$m_{\mathrm{II}}=2\times\frac{3}{4}B^2A_1A_2A_3\,\mathrm{Re}\left[\hat{\Phi}xxx(f_1,f_2)\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (85)$$

となる

虚数部の方も同一の測定系でフィィタの位相関係のみ

$$\angle G_1(f_1)+\angle G_2(f_2)+\pi/2=\angle G_3(f_1+f_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (86)$$

としてやれば $\mathrm{I}m\left[\hat{\Phi}xxx(f_1,\ f_2)\right]$ が求まる。

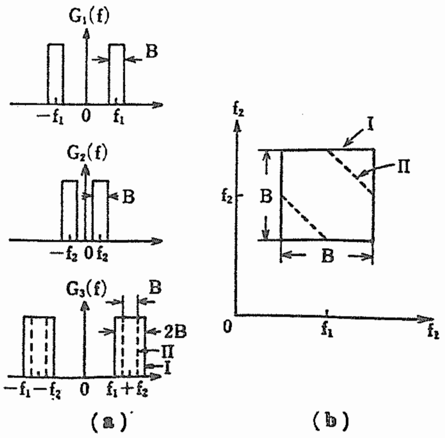

図１１　(a)バイスペクトル測定のためのフィルタの周波数特性
(b)周波数領域における実効平均化領域

7.3　7.2 の測定系による推定誤差

図１０のブロック線図でバイスペクトルが測定できることに注目すると、mがバイスペクトルの実数部、あるいは虚数部の推定値であることから、有限時間Tで平均化されたmの統計的誤差を求めればよい。

$$m=\frac{1}{T}\int_0^T z(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (87)$$

$$z(t)=x_1(t)\,x_2(t)\,x_3(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (88)$$

mの分散 σ_m^2 は、Tが十分大きいとき、近以的に次のように表わされる。[12)]

$$\sigma_m^2=E\left[m^2\right]-\{E\left[m\right]\}^2$$

$$\doteqdot\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\phi xx(\tau)-\{E\left[z(\tau)\right]\}^2\right]d\tau \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (89)$$

バンドパスフィルタの中心周波数は互いに異なっいて $f_1\neq f_2$，$f_1\neq 0$，$f_2\neq 0$ とし、フィルタの通過帯域も互いに重ならないものとする。いま、各フィルタの出力 x_1，x_2，x_3 が互いに独立であるとすれば、

$$E\left[z(t)\right]=E\left[x_1(t)\right]E\left[x_2(t)\right]E\left[x_3(t)\right]=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (90)$$

$$\begin{aligned}\phi zz(\tau)&=E\left[z(t)z(t+\tau)\right]\\&=E\left[x_1(t)x_1(t+\tau)\right]E\left[x_2(t)x_2(t+\tau)\right]E\left[x_3(t)x_3(t+\tau)\right]\\&=\phi_1(\tau)\phi_2(\tau)\phi_3(\tau)\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (91)$$

ただし、$\phi_i(\tau)$は信号$x_i(t)$の自己相関関数とする。（90）（91）式を（89）式に代入すれば、

$$\sigma_m^2\doteqdot\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_1(\tau)\phi_2(\tau)\phi_3(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}df\,\Phi_3(f)\int_{-\infty}^{\infty}df'\,\Phi_1(f-f')\,\Phi_2(f') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (92)$$

ただし、

$$\Phi i(f)=|G\,i(f)|^2\,\Phi xx(f) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (93)$$

で、$\Phi xx(f)$はxのパワースペクトルである。

各バンドパスフィルタの通過帯域の中でxのパワースペクトルが一定とみなせれば、前述のウィンドウの組Ｉ，IIについて（92）はそれぞれ次のようになる。

$$\sigma^2_{m\,\mathrm{I}}=\frac{2}{T}B^2A_1^2A_2^2A_3^2\,\Phi xx(f_1)\,\Phi xx(f_2)\,\Phi xx(f_3) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (94)$$

$$\sigma^2_{m\,\mathrm{II}}=\frac{2}{T}\,\frac{3}{4}B^2A_1^2A_2^2A_3^2\,\Phi xx(f_1)\,\Phi xx(f_2)\,\Phi xx(f_3) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (95)$$

（92）式によれば、mの分散は各バンドパスフィルタの位相特性には関係しないことが分かり、従って、バイスペクトルの実数部と虚数部の分散は等しくなる。そこで、図11のＩとIIのフィルタの構成で求めたバイスペクトルの実数部（虚数部）の推定値の分散 σ^2_{IR}，σ^2_{IIR} はそれぞれ、

$$\sigma^2_{\mathrm{IR}}=\frac{\sigma^2_{m\mathrm{I}}}{(2B^2A_1A_2A_3)^2}=\frac{1}{2TB^2}\Phi xx(f_1)$$

$$\times \Phi xx\,(f_2)\,\Phi xx\,(f_3) \quad \cdots\cdots (96)$$

$$\sigma^2_{\mathrm{IIR}} = \frac{\sigma^2_{m\mathrm{II}}}{(2\cdot\frac{3}{4}\ \mathrm{B}^2\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)} = \frac{1}{2\mathrm{T}\,(\frac{3}{4}\mathrm{B}^2)}$$

$$\times \Phi xx\,(f_1)\,\Phi xx\,(f_2)\,\Phi xx\,(f_3) \quad \cdots\cdots (97)$$

となる。

(96) 式と前に求めた (77) 式を比べれば、(99) 式は (77) 式の½になっており、実数部と虚数部を合わせれば (77) 式と丁度一致することがわかる。

さて、$f_1 = f_2 \fallingdotseq 0$ の場合について考察してみよう。$f_1 = f_2$ の時には $x_1 = x_2$であり、x_1 と x_3 が独立ならば

$$z(t) = \mathrm{E}[\,x_1(t)\,x_1(t)\,]\,\mathrm{E}[\,x_3(t)\,] = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(98)$$

$$\Phi_{\mathrm{ZZ}}(\tau) = \mathrm{E}[\,x_1(t)x_1(t+\tau)\,x_1(t)x_1(t+\tau)\,]\ \mathrm{E}[\,x_3(t)x_3(t+\tau)\,] \quad \cdots\cdots\cdots(99)$$

信号 $x_1(t)$がガウス性信号であれば (99) 式の4次モーメントは2次モーメントの積和として表わすことができて、

$$\phi_{zz}(\tau) = \{\,\phi^2_1(0) + 2\,\phi^2_1(\tau)\,\}\,\phi_3(\tau) \cdots\cdots(100)$$

(98), (100) 式を (89) 式に代入して、

$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_3(\tau)d\tau = \Phi_3(0) = 0$ を利用すれば、

$$\sigma^2_m \doteqdot \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{\infty}\{\,\phi^2_1(0) + 2\phi^2_1(\tau)\,\}\,\phi_3(\tau)d\tau$$

$$= \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^2_1(\tau)\phi_3(\tau)d\tau$$

$$= \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{\infty}df\,\Phi_3(f)\int_{-\infty}^{\infty}df'\,\Phi_1(f')\,\Phi_1(f-f') \quad \cdots\cdots\cdots (101)$$

従って、(92) 式とみくらべれば $f_1 = f_2$ の場合には、バイスペクトル推定値の分散は $f_1 = f_2$ の場合の2倍となることが分る。$f_1 = 0, f_2 = f_3 \fallingdotseq 0$ 等の条件件の場合についても、同様にしてバイスペクトルの分散はやはり2倍となるのである。

ところで、以上の結果は、観測時間Tを十分大きいとしてBrillinger ら[13,14]が得ている結果とも一致している。Brillinger らは、n次スペクトルの推定値の分散を求めるのに、信号xのガウス性は仮定していないが、xは非ガウス性であっても、狭帯域フィルタを通った信号はガウス性に近い性質を持つことと、Tが十分に大きいことは狭帯域フィルタを利用することと等価であることなどを考えれば、上で得た結果と合致するのは当然といえよう。

8. 3次相関関数とバイスペクトルの例

8.1 ガウス性信号

ガウス性借号 (x_1, x_2, ……, x_n) の特性関数を$\varphi_n(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n)$ とすれと、

$$\varphi_n(z_1, z_2, \cdots\cdots z_n) = \exp\,(\,j\sum_{k=1}^{n}m_k\,z_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sigma_{k\ell}\,z_k z_\ell\,) \cdots(102)$$

ただし

$$m_k = \mathrm{E}[\,x_k\,],\ \sigma_{kl} = \mathrm{E}[\,(x_k - m_k)(x_l - m_l)\,] \quad \cdots\cdots\cdots (103)$$

k次のキュムラントを (注2) によって求めれば、ガウス性信号では3次以上のキュムラント (相関関数) は0であことが分かる。従って、3次相関関数のフーリエ変換であるバイスペクトル密度も0になる。

8.2 互いに独立な二つの信号の和

信号 $x(t)$と $y(t)$が平均値0で互いに独立であるとき、両者の和の信号 $z(t)$のバイスペクトルは、それぞれのバイスペクトルの和で表わすことができる。すなわち、

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad \cdots\cdots\cdots (104)$$

とすると、

$$\Phi zzz\,(f_1, f_2) = \Phi xxx\,(f_1, f_2) + \Phi yyy(f_1, f_2) \quad \cdots\cdots\cdots (105)$$

8.3 2次高調波を含む正弦波信号

周波数f_o, $2f_o$の二つの正弦波で合成される、次のような信号 $x(t)$を考える。

$$x(t) = \mathrm{A}_1\cos\,(2\pi f_o t - \varphi_1) + \mathrm{A}_2\cos\,(4\pi f_o t - \varphi_2) \quad \cdots\cdots\cdots (106)$$

ここで、A_1, A_2, φ_1, φ_2 は定数であるとする。この時、$x(t)$について自己相関関数を求めると、よく知られているように、

$$\Phi xx(\tau) = \frac{\mathrm{A}_1^2}{2}\cos\,(2\pi f_o t) + \frac{\mathrm{A}_2}{2}\cos\,(4\pi f_o t) \quad \cdots\cdots\cdots (107)$$

$$\Phi xx(f) = \frac{\mathrm{A}_1^2}{4}\{\,\sigma(f - f_o) + \sigma(f + f_o)\,\} + \frac{\mathrm{A}_2^2}{4}\{\,\sigma(f - 2f_o) + \sigma(f + 2f_o)\,\} \quad \cdots\cdots\cdots (108)$$

パワースペクトルは周波数 $f=\pm f_o$，$\pm 2f_o$ のところに鋭いピークを持つ線スペクトルとなる。このように、自己相関関数やパワースペクトルには位相に関する情報は入っていない（（107），（108）式には φ_1，φ_2 は入っいない）。

3次相関関数とバイスペクトルを求めると、

$$\phi xxx(\tau_1,\tau_2)=\frac{A_1^2\ A_2}{4}[\cos\{2\pi f_o(\tau_1+\tau_2)-2\varphi_1+\varphi_2\}+\cos\{2\pi f_o(2\tau_1-\tau_2)+2\varphi_1-\varphi_2\}+\cos\{2\pi f_o(2\tau_2-\tau_1)+2\varphi_1-\varphi_2\}\quad\cdots\cdots\cdots(109)$$

$$\Phi xxx(f_1,f_2)=\frac{A_1^2\ A_2}{8}[e^{-j(2\varphi_1-\varphi_2)}\times\delta(f_1-f_o,f_2-f_o)+e^{j(2\varphi_1-\varphi_2)}\delta(f_1+f_o,f_2+f_o)+e^{-j(-2\varphi_1+\varphi_2)}\delta(f_1-2f_o,f_2+f_o)+e^{j(-2\varphi_1+\varphi_2)}\delta(f_1+2f_o,f_2-f_o)+e^{-j(-2\varphi_1+\varphi_2)}\delta(f_1+f_o,f_2-2f_o)+e^{j(-2\varphi_1+\varphi_2)}\delta(f_1-f_o,f_2+2f_o)\quad\cdots\cdots\cdots(110)$$

（f_1，f_2）平面上の6ケ所でバイスペクトルは値を持つが、$f_1\geqq 0$，$f_2\geqq 0$ の範囲では、$f_1=f_2=f_o$ において、

$$\Phi xxx(f_o,f_o)df^2=\frac{A_1^2\ A_2}{8}e^{-j(2\varphi_1-\varphi_2)}\quad\cdots\cdots\cdots(111)$$

となる。ここで、$2\pi f_o t_1=\varphi_1$ とおくと、$x(t)$は、

$$x(t)=A_1\cos 2\pi f_o(t-t_1)+A_2\cos\{4\pi f_o(t-t_1)+2\varphi_1-\varphi_2\}\quad\cdots\cdots\cdots(112)$$

と書けることに注意すると、バイスペクトルに現われる位相角は二つの周波数成分間の位相差に等しいことが分かる。

このような位相に関する情報は、信号が確定的で $x(t)$が雑音なく測定できるならば、$x(t)$をフーリエ級数展開することによって求めることができる。しかし、$x(t)$にガウス性雑音 $n(t)$が加わった $y(t)$しか測定できない時には、フーリエ級数展開でそれを求めることは不可能であるが、$y(t)$のバイスペクトルが $x(t)$のそれと等しいことから、雑音 $n(t)$の影響を除いて位相の測定をすることができるのである。

以上のところでは、A_1，A_2，φ_1，φ_2 は定数としたが、次に確率変数として考察してみる。信号 $x(t)$から取り出した x_T注4）を周期 $T(=\frac{1}{f_o})$ で繰り返した信号を $x'_T(t)$とす。

$$x'_T(t)=x_T(t)\qquad t+nT\leqq t'\leqq t+(n+1)T$$
$$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots(113)$$

この時、$x'_T(t)$はフーリエ級数で表現することができ、f_oと $2f_o$ の二つの周波数成分を持つ。

$$x'_T(t)=a_o\cos 2\pi f_o t+b_1\sin 2\pi f_o t+a_2\cos 4\pi f_o t+b_2\sin 4\pi f_o t=c_1\cos(2\pi f_o t-\varphi_1)+c_2\cos(4\pi f_o t-\varphi_2)\quad\cdots\cdots(114)$$

ここで、a_i，b_i，c_i，φ_i（$i=1$，2）は確率変数である。$x'_T(t)$の相関関数 $\phi^T_{x'x'}(\tau)$を求めよう。

$$\phi^T_{x'x'}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x'_T(t)\,x'_T(t+\tau)\,dt=\frac{c_1^2}{2}\cos 2\pi f_o\tau+\frac{c_2^2}{2}\cos 4\pi f_o t\quad\cdots\cdots\cdots(115)$$

$x(t)$の相関関数は（115）式の期待値 $E[\phi^T_{x'x'}]$ として求まる。つまり、

$$\phi xx(\tau)=\frac{E[c_1^2]}{2}\cos 2\pi f_o\tau+\frac{E[c_2^2]}{2}\times\cos 4\pi f_o t\quad\cdots\cdots(116)$$

3次相関関数については、

$$\phi^T_{x'x'x'}(\tau_1,\ \tau_2)=\frac{1}{T}\int_0^T x'_T(t)\,x'_T(t+\tau_1)\times x'_T(t+\tau_2)dt$$
$$=\frac{c_1^2\ c_2}{4}[\cos\{2\pi f_o(\tau_1+\tau_2)-2\varphi_1+\varphi_2\}+\cos\{2\pi f_o(2\tau_1-\tau_2)+2\varphi_1-\varphi_2\}+\cos\{2\pi f_o(2\tau_2-\tau_1)+2\varphi_1-\varphi_2\}]\quad\cdots\cdots\cdots(117)$$

a_i，b_i（$i=1$，2）が平均値0で互いに独立な確率変数であるとすると、φ_1，φ_2 も互いに独立で、$-\pi$とπの間に一様に分布する。その場合に（117）式の期待値をとれば、

$$\phi xxx(\tau_1,\tau_2)=E[\phi^T_{x'x'x'}(\tau_1,\ \tau_2)]=0\quad\cdots\cdots\cdots(118)$$

従ってバイスペクトルも0である。

ところが、φ_1，φ_2 が独立ではなく、

$$\varphi_2 - 2\varphi_1 = \varphi = \text{定数} \qquad \cdots\cdots (119)$$

なる関係が保たれているときには、(117)式の期待値を取ると φ は一定なので、とおけば、バイスペクトルは $f_1 = f_2 = f_0$ において、

$$\Phi xxx(f_1, f_2)\,df^2 = \frac{\mathrm{E}[c_1^2 c_2]}{8} e^{j\varphi} \qquad \cdots\cdots (120)$$

となる。

以上から明らかなように、不規則信号において、例えば周波数 f_0 と $2f_0$ の成分があり、その一方が他方から派生したものである時には、φ_1 と φ_2 の間には一定の位相関係が生じてバイスペクトルは0でなくなる。このようにして、自己相関関数やパワースペクトルでは全く分からない、2成分間の位相の性質を調べることができるのである。

8.4 周期信号

8.3の場合を一般化して、t' を時間原点に取った次の信号を調べてよう。

$$x(t) = \sum_{n=1}^{m} \mathrm{A}n \cos\{2\pi n f_0(t-t') - \varphi n\} \qquad \cdots\cdots\cdots (121)$$

A_n, φ_n が定数の時、$f_1 \geqq 0$, $f_2 \geqq 0$ の範囲に限ってみると、バイスペクトル密度は、

$$\Phi xxx(f_1, f_2) = \sum_{k,l} \frac{\mathrm{A}_k \mathrm{A}_l \mathrm{A}_{k+l}}{8} e^{j(\varphi_{k+l} - \varphi_k - \varphi_l)} \delta(f_1 - kf_0, f_2 - \ell f_0) \qquad \cdots\cdots\cdots (122)$$

ただし、$k + \ell \leqq m$ とする。図12に $m = 5$ とした場合のバイスペクトルを示す。

A_n, φ_n 等が確率変数であっても、

$$\varphi_{k+l} - \varphi_k - \varphi_l = \varphi = \text{一定} \qquad \cdots\cdots (123)$$

となる関係の保たれている周波数の組 (kf_0, ℓf_0) のところで、バイスペクトルが値を持つ。

8.5 ガウス性信号を入力とする、ある非線型回路の出力信号（ある弱い非ガウス性を持つ信号）

弱い非ガウス性を持つ信号 $y(t)$ が、平均値0のガウス性信号 $x(t)$ により次のように表わされるとする。

$$y(t) = x(t) + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t_1, t_2)\, x(t-t_1)\, x(t-t_2)\, dt_1\, dt_2 \qquad \cdots\cdots (124)$$

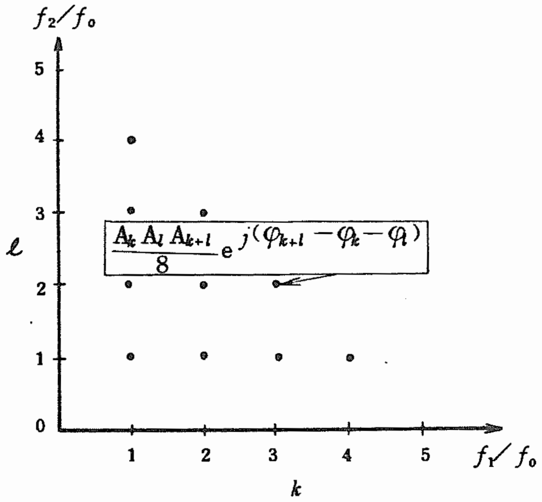

図12 信号 $x(t) = \sum_{n=1}^{5} \mathrm{A}n \cos\{2\pi n f_0(t-t') - \varphi n\}$ のバイスペクトル（$f_1 \geqq 0$, $f_2 \geqq 0$, $f_1 + f_2 \leqq 5$ の範囲）

ただし、$\varepsilon(\ll 1)$ は定数で、$g(t_1, t_2)$ は t_1, t_2 について対称、t_1, $t_3 < 0$ で $g(t_1, t_2) = 0$ とする。

$y(t)$ の3次相関関数を求める場合に、$x(t)$ について奇数次モーメントは0になること、ε^3 の項は小さいとして省略できることを利用して、

$$\begin{aligned}\phi_{yyy}(\tau_1, \tau_2) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\, dt_2\, g(t_1, t_2) \\ \times [\{\phi_{xx}(\tau_1) + \phi_{xx}(\tau_2) \\ + \phi_{xx}(\tau_1 - \tau_2)\}\phi_{xx}(t_1 - t_2) + 2\phi_{xx}(\tau_1 - t_1) \\ \times \phi_{xx}(\tau_1 - \tau_2 - t_2) + 2\phi_{xx}(\tau_2 - t_2)\,\phi_{xx} \\ (\tau_2 - \tau_1 - t_1) + 2\phi_{xx}(\tau_1 + t_1)\,\phi_{xx}(\tau_2 + t_2)]\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots (125)$$

$$\begin{aligned}\Phi yyy(f_1, f_2) = \varepsilon[\Phi xx(f_1)\delta(f_2) + \Phi xx(f_2)\delta(f_1) \\ + \Phi xx(f_1)\delta(f_1 + f_2)] \times \int_{-\infty}^{\infty} df'\, \Phi xx(f')\mathrm{G}(f_1' - f') \\ + 2\varepsilon[\Phi xx(f_1 + f_2)\Phi xx(f_1)\mathrm{G}(f_1 + f_2, -f_1) + \Phi xx \\ (f_1 + f_2)\Phi xx(f_2)\mathrm{G}(f_1 + f_2, -f_2) + \Phi xx(f_1)\Phi xx \\ (f_2)\mathrm{G}(-f_1, -f_2)]\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots (126)$$

信号の構造を（124）式と仮定した場合（126）式によって周波数成分間の干渉の度合が与えられることになる。

ここで、$g(t_1, t_2) = \delta(t_1, t_2)$ とすると、(124)式は、

$$y(t) = x(t) + \varepsilon x^2(t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (127)$$

となる。この $y(t)$ についてのバイスペクトルは (126)式において $\mathrm{G}(f_1, f_2) = 1$ とおけばよい。いま、信号 $x(t)$ のパワースペクト

ルは図13(a)に示すように、中心周波数 f_0 の附近に集中しているものとすると、$y(t)$ のパワースペクトルは図13(b)のように、f_0 と $2f_0$ の附近にパワーが集中することになる（ただし直流分は除いて考えておく）。バイスペクトルは、$f_1 \geqq 0, f_2 \geqq 0$ の部分を考えると、図13(c)のように $f_1 = f_2 = f_0$ の位置で0でない値を持つ。これは $y(t)$ に含まれる周波数 f_0 と $2f_0$ のパワー成分が互いに独立ではなく、一方から派生したものであるからである。

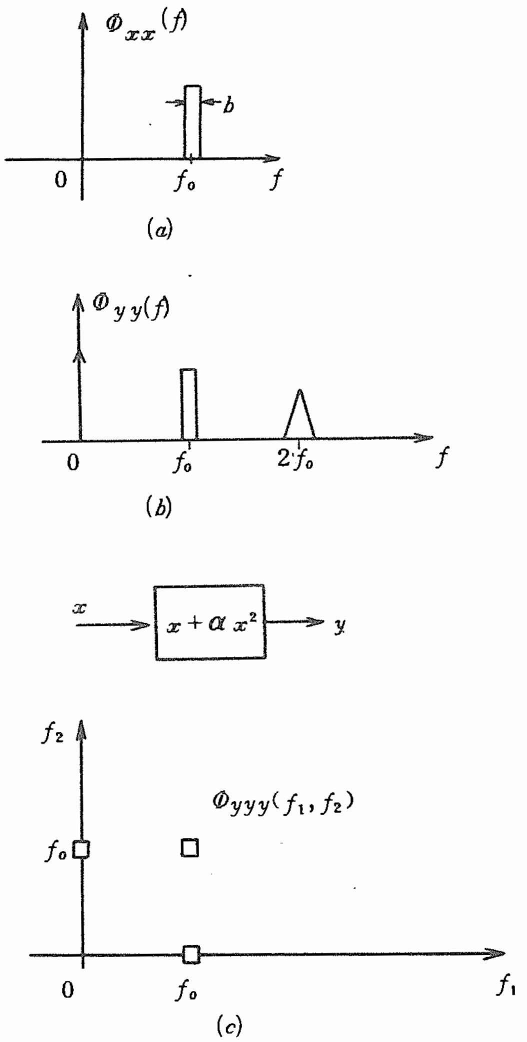

図13 (a)信号 x のスペクトル
(b)非線型出力 y のスペクトル
(c) y のバイスペクトル

参 考 文 献

10) D. R. Brillinger and M. Rosenblat, " Computation and interpretation of k－th order spectra," in Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series, B. Haris, Ed. New York : Wiley, 1967, pp. 189–232.

11) 上野,舘 , 山田, 藤村, " バイスペクトルの測定とその応用," 応用物理, vol. 45－5, pp. 385–396, 1976.

12) 上野, " バイスペクトラム測定とその統計的誤差," 第12回計測自動制御学会予稿集 pp. 659 － 660, 1973.

13) D. R. Brillinger and M. Rosenblatt, " Asymtotic theory of k-th order spectra " in Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series, B. Harris, Ed. New York : Wiley, 1967, pp. 153–188.

14) P. J. Huber, B. Kleiner, T. Gasser, and G. Dumermuth, " Statistical methods for investigating phase relations in stationary stochastic processes," IEEE Trans., AU－19－1, pp. 78–86, 1971.