バイオメカニズム学会誌，VOL. 2, №3 (1978)

講座

バイオメカニズム研究者のための バイスペクトル分析の理論と応用 (1)

舘　　暲 *

序文 ― 講座のはじめに

バイオメカニズムの研究のようないわゆる学際領域においてテクノロジートランスファー（技術移項）の果す役割が極めて大きいことは日頃よく経験するところである。それらの中心はもちろん機能と材料ではあろうが、例えば相関関数やパワースペクトルのようなある種の統計的信号処理法も、それを良く理解し、その実例を多く知ることにより、それを自分自身の研究領域にもちこんで応用し、それにより研究を進展させてゆくという形で、ある種のトランスファーにいままで数多く寄与してきている。

本講座ではバイスペクトル分析という統計的手法を取り上げ、それの定義、測定法、誤差は無論のこと、特に、その物理的な意味、計算上の便法などについても詳しく言及し、また、種々の分野における応用などをなるべく分りやすく紹介することにより、この手法を汎用の解析手法の一つとして会員に提供することを目的としている。

そのため数学的な厳密さは追わず、なるべく直観的に理解しやすい形で説明し、また式などは変形の途中をなるべく省略しないよう努力をはらっている。したがって、この手法が特に医学・生物学系会員のそれぞれの問題解決のための鋭い刃を持った七つ道具の一つとして、それぞれの手持ちの解析手法のレパートリに加えられるならば、また、それから問題解決への糸口がほどけるならば、著者の労はねぎらわれてなお余りあるのである。

1. はじめに

「河の水面はいつ眺めても楽しかった。数学者兼物理学者としての私には、それはまた別の意味を持っていた。絶えず移動するさざ波のかたまりを研究して、これを数学的に整理することはできないものだろうか。そもそも数学の最高の使命は無秩序の中に秩序を発見することではないのか。波はある時は高くうねって泡のまだらをのせ、またある時はほとんど目に見えぬさざ波となる。時々波の波長はインチで測れる位になったかと思うと、再び幾ヤードにもなるのであった。いったいどういう言葉を使ったら水面をすっかり記述するという手におえない複雑さにおちいらずに、これらのはっきり目に見える事実を描き出すことができるだろうか。」と、サイバネティクスの創始者の大天才ノバート・ウィーナーはその自伝的著書の中で述べている[1]。この考えが後に、氏の最大の業績の一つといわれる一般調和解析（Generalized Harmonic Analysis）を生むのである。

風、池のさざ波、人の話し声、町の騒音、機械の振動、筋電図、心電図や脳波といった生体の電気現象、あるいは経済変動というように、我々のまわりには時間とともに変動す

* 機械技術研究所システム部

る、いわゆる時系列信号が多く存在している。

また、表面あらさの測定や、伝送写真や、テレビの一画面を表わす信号のように、本来は時系列信号でないもので、スキャニングの操作によって時系列信号となってくるものも多くみうけられる。

これらの信号の多くはその変動が不規則である。しかし、一見不規則なものの中にも、ある周期を持つ繰り返しのような規則性らしきものがうかがわれる。また、よく観察すると、そのような繰り返しの波形にもある種の“くせ”のようなものも見受けられる場合もあるのである。

このような信号を解析する手段の一つに、現在では良く知られているパワースペクトル（power spectrum）解析がある。これは、規則的に繰り返す信号や有限時間で終わる単発的な現象に対してフーリエ級数展開やフーリエ変換が果した役割を不規則な信号にも適用しようとする試みの一つである。この方法は一見不規則ななかの規則性、特にある種の周期性の存在を探る有効な手段を与え、今まで種々の応用分野で目覚ましい成果をあげている。

だが、パワースペクトル解析は信号の周期性には有効であるが、その信号の波形というような概念は持ち合わせていない。したがって、観測している信号がガウス性不規則信号である場合には信号の情報を十分に抽出し得るが、信号が他の一般的な確率過程からの出現値の場合にはこれだけでは不十分である。

一般の確率過程からの出現値を対象とする場合、不規則な波が周期性を持つだけでなくなんらかの波の形の“くせ”のようなものが生じる場合がある。このような統計的にみた場合の波形の情報までをも含めて記述するには、パワースペクトルよりもさらに高次のスペクトルを知る必要があるのである。

さて、一般の過程の統計的な記述にはn次までの高次のスペクトルを必要とし、そのnは一般的には無限大にもなり得る。そのようなn次の高次スペクトルのうち、バイスペクトル（bispectrum）は、パワースペクトル（n＝2）よりも、1次次元が上（n＝3）のものという意味を持っているのである。パワースペクトルとバイスペクトルがそれぞれn＝2. n＝3にあたるということは、それぞれが2次と3次の統計量であるという事に対応しており、1次のものはいわゆる平均値である。そして、スペクトルとしてはパワースペクトルに続くものであり、独立な変数である周波数が二つ関係することから、バイ（bi）をつけてバイスペクトルと呼んでいるのである。

この講座では、統計的な信号処理の基礎となるフーリエ変換やパワースペクトルなどについて概観する。そののち、バイスペクトルについて、その定義、性質、測定法、物理的な意味などを整理し、それが信号処理の一手法として広範囲の分野に応用し得ることを具体例を持って提示する。

2. フーリエ変換（Fourier transform）

時系列信号が、いつも一定の形をして繰り返し出現する信号である場合、すなわち決定的な（deterministic）、周期Tの周期関数（periodic function）$x(t)$で表わせる信号である場合には、良く知られているようにその信号を次式のごとくフーリエ級数展開できる。

$$x(t)=\frac{a_0}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n2\pi}{T}t+b_n\sin\frac{n2\pi}{T}t\right)\cdots\cdots(1)$$

ここで、nは正の整数であり、直流分 a_0 と、各周波数成分の係数 a_n および b_n はおのおの、

$$a_0=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt$$

$$a_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos \frac{n2\pi}{T} t \quad dt$$

$$b_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin \frac{n2\pi}{T} t \quad dt$$

として求められる。

(1)式の意味は明瞭である。周期的な波形はそれを単純な正弦波的な振動（単振動）に分解できるということであり、逆に考えれば、いかに複雑にみえる波形でも、それが規則的に繰り返しているならば、その波形を最も簡単な正弦波状の信号を加え合わせることにより、例えば図1のごとく合成できるということである。

さて、周期信号に対して極めて明白な意味を持つ、信号をいろいろな周波数成分を持つ単振動の合成として考える概念を、さらに一般の場合にまで拡張したいという考えが生じてくる。これを行う一つの方法にフーリエ変換がある。フーリエ変換という積分変換により時間領域にある関数 x(t) を、それに含まれている情報を全く失うことなく、周波数領域の関数 X(f) に移しかえることができるのである。そして、その周波数領域は、さきにみたフーリエ級数に似て、もとの信号 x(t) を構成する周波数成分のどのようなものが、どのくらい、どのような位相関係で含まれているかということを表わしているのである。

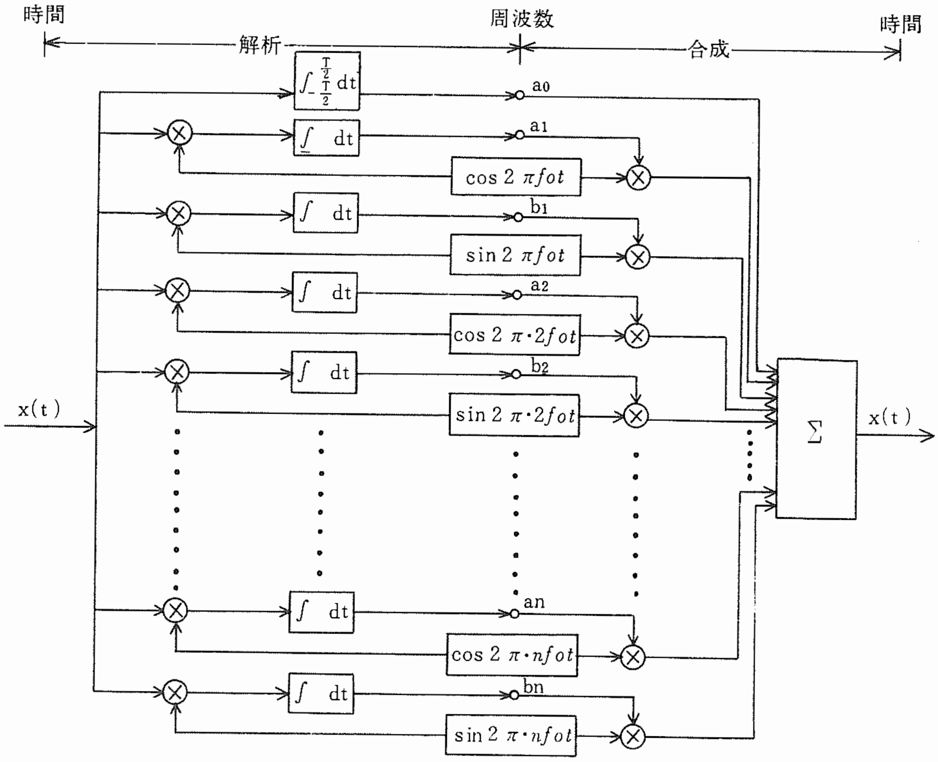

図1　周期関数の合成

また、周波数の関数がもとの情報を全く失っていないため、逆フーリエ変換という変換によりもとの時間領域の信号に戻すこともできるのである。（図2）

時間信号 x(t) を周波数関数 X(f) に移すフーリエ変換 F(・) とその逆フーリエ変換 $F^{-1}(\cdot)$ を次式で定義する。註1)　$j=\sqrt{-1}$ として、

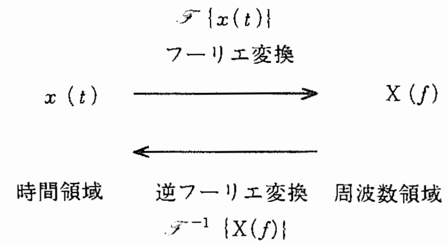

図 2　時間領域と周波数領域の変換

$$
\left\{
\begin{aligned}
X(f) &= F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi jft}\, dt \\
x(t) &= F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{2\pi jft}\, df
\end{aligned}
\right. \tag{2}
$$

このフーリエ変換は次の重要な関係を満足している。

すなわち二つの関数 $x(t)$、$y(t)$ がそれぞれフーリエ変換可能であり、それらを $X(f)$、$Y(f)$ とすれば、二つの任意定数 a, b に対して、

$$
\begin{aligned}
F\{ax(t)+by(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ax(t)+by(t)\}\, e^{-2\pi jft}\, dt \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi jft}\, dt + b\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-2\pi jft}\, dt \\
&= aF\{x(t)\} + bF\{y(t)\} \\
&= aX(f) + bY(f)
\end{aligned} \tag{3}
$$

逆変換も同様な関係を満足している。この性質を変換の線形性 (linearity) という。

それでは $x(t)$ と $y(t)$ の積 $x(t)\ y(t)$ をフーリエ変換するとどのようになるであろうか。

$$
F\{x(t)\ y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ y(t)\ e^{-2\pi jft}\, dt
$$

$x(t)$ と $y(t)$ を逆フーリエ変換を用いて表わすと、

$$
= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)\ Y(f_2)\ e^{2\pi jf_1t}\ e^{2\pi jf_2t}\ e^{-2\pi jft}\ df_1\, df_2\, dt
$$

e の巾乗の項をまとめて

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)\ Y(f_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j(f_1+f_2-f)t}\ dt \right] df_1\ df_2$$

〔　〕の中は定数１の f_1+f_2-f なる周波数領域へのフーリエ変換だから

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)\ Y(f_2)\ \ \delta(f_1+f_2-f)\ df_1\ df_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(f_2)\ \ \delta(f_2-f+f_1)\ df_2 \right] df_1$$

〔　〕内はディラックの δ 関数の性質から $Y(f-f_1)$ となって、

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)\ Y(f-f_1)\ df_1 \qquad (4)$$

ただし、 $\delta(\cdot)$ はディラックの δ 関数であり、それは定数１のフーリエ変換である。

式(4)は積のフーリエ変換が、おのおののフーリエ変換の合成積、あるいは畳み込み積分（ convolution ）となることを意味している。合成積を記号＊で表わすと、式(4)は次の様に表現できる。

$$F\{x(t)\ y(t)\} = F\{x(t)\} * F\{y(t)\} = X(f) * Y(f) \qquad \cdots\cdots (5)$$

逆に、 $x(t)$ と $y(t)$ の合成積　$x(t)*y(t)$ のフーリエ変換は各々のフーリエ変換の積となる。すなわち、

$$F\{x(t)*y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ y(t-\tau)\,d\tau\right] e^{-2\pi jft}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ e^{-2\pi jf\tau}\,d\tau \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)\,e^{-2\pi jf(t-\tau)}\,dt$$

$t-\tau = s$ とおいて

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ e^{-2\pi jf\tau}\,d\tau \int_{-\infty}^{\infty} y(s)\ e^{-2\pi jfs}\,ds$$

$$= F\{x(t)\}\ \ F\{y(t)\}$$

$$= X(f)\ Y(f) \qquad \cdots\cdots\cdots (6)$$

もう一つ基礎的なことがらを証明なしで述べておこう。すなわち、どのような関数がフーリエ変換可能かという問題である。もし、 $x(t)$ が積分可能（ $x \in L^1$ ）ならば、 $F(x)$ は存在し、それは周波数 f の連続関数となる。しかし、これでは実用的でない。 $x(t)$ がルベーク積分の意味で２乗積分可能（ $x \in L^2$ ）、すなわち $\int |x(t)|^2\,dt$ が存在するならば、$x(t)$ のフー

リエ変換は、フーリエ変換を超関数の意味でのフーリエ像に拡張することにより存在し、その X(f) 自身もやはり L^2 に属するのである。(詳しい証明は例えば文献〔2〕を参照されたい。)

さて、このようにして、超関数をも含めた関数のフーリエ変換対(変換と逆変換で結ばれた時間領域の関数と周波数領域の関数の対)を図3に示してある。

図3の左側が時間関数で右側が周波数関数である。図中に示されている矢印はディラックのδ関数と呼ばれる超関数を示している。

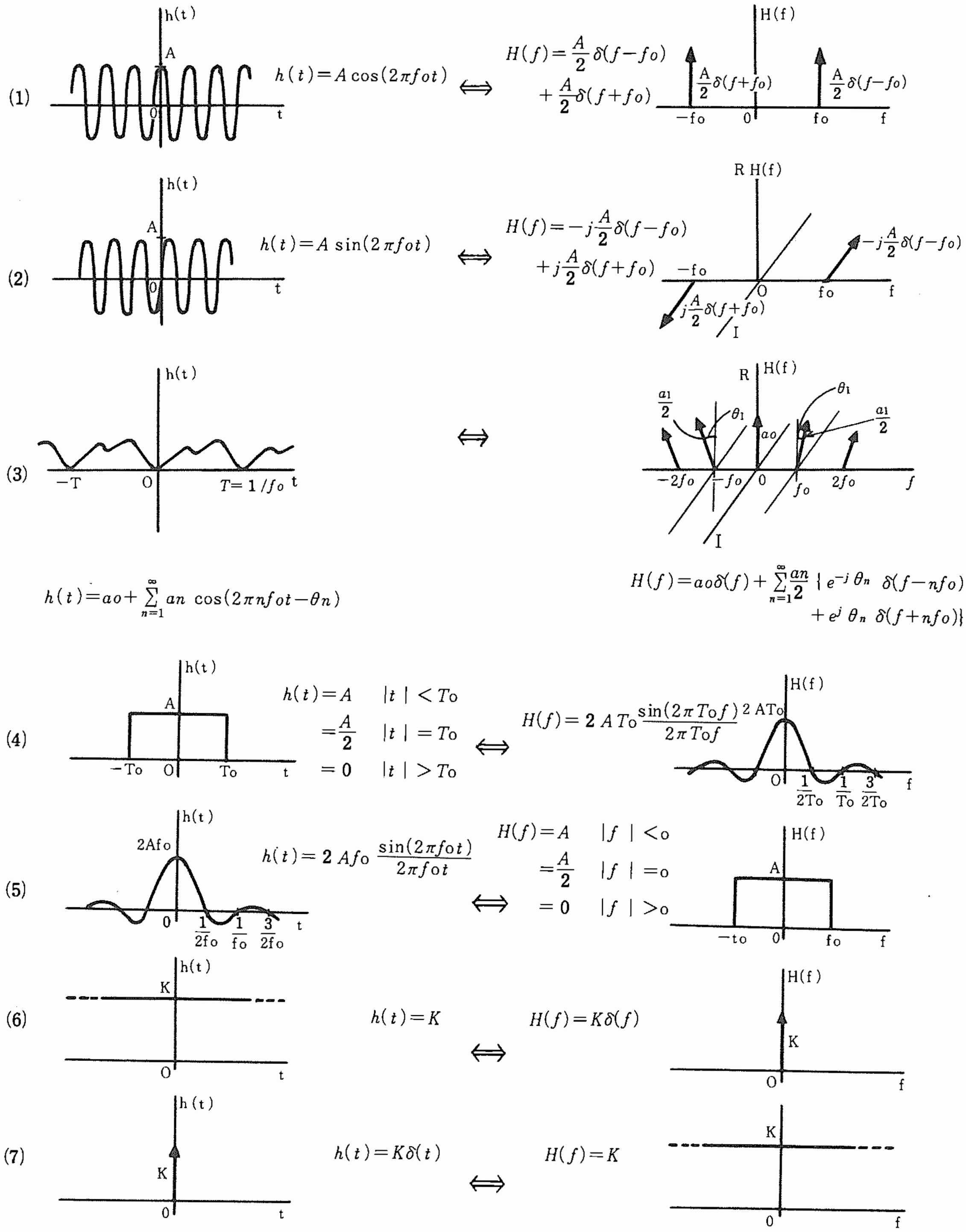

図3 (A)

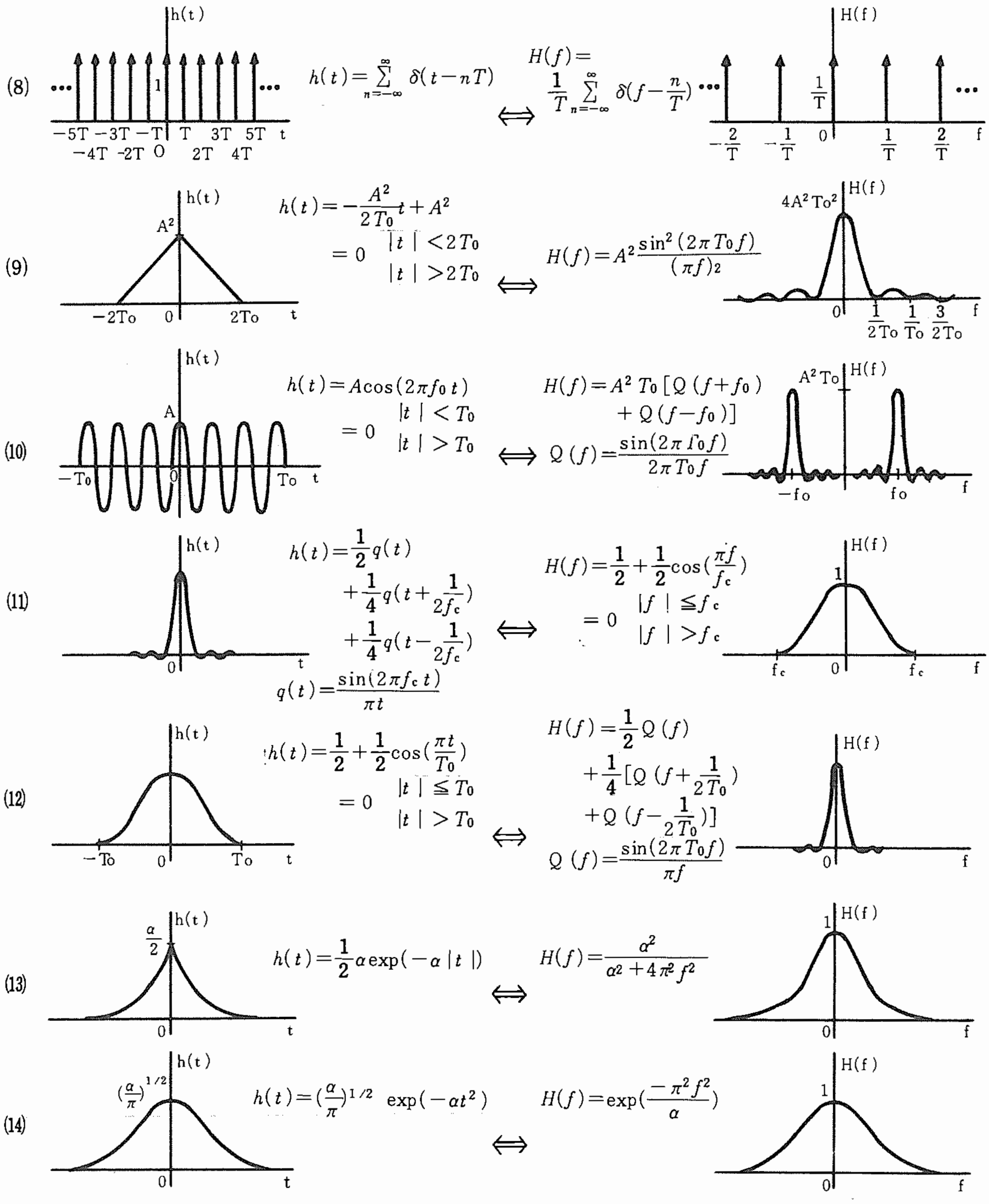

図３（B）　重要なフーリエ変換対

$\delta(t)$は、その値というものはなく無限大であるが、どんな $\varepsilon>0$ に対しても

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\,dt=1$$ であり、

$$x(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,x(t)\,dt$$

である関数で、直観的に考えれば、無限小の幅を持ち無限大の高さをもって、その面積が1であるようなインパルスである。これは我々が概念としてよく利用する、ある一点にのみ集中した力とか、ある点としての物体のもつ質量という非常に重要であるが、連続系の中に数学的に押し込もうとする時に感じる困難さを、超関数の理論で正統化したものであ

る。もっとも $\delta(t)$ という表わし方は超関数の記法ではなく、数学的な裏づけは弱いが、普通の関数と同様な扱いができるという意味で極めて便利な記法である。

図3で、まず $A\cos 2\pi f_0 t$ が、fo と −fo のところに生じる二つの δ 関数となっていることに注目したい。これが時間領域での単振動を周波数の立場から見て表示したことになっており、負の周波数 −fo を fo と同一視して考えれば、fo の周波数のみを持った信号ということを表現している。fo という単一の周波数のみで、しかも物理的な振動であるから、あるエネルギーを持つわけであるが、それがその周波数一点にのみ集中しているので、それを数学的に表示し得るものは δ 関数ということになるのである。

$\sin(2\pi f_0 t)$ も $\cos(2\pi f_0 t)$ と本質的には同一であるが、時間領域で90度の位相差を持っているわけで、それが周波数領域にも反映して、δ 関数の90度の回転となって現われている。これからもわかるように、時間領域は2次元平面上に表わせるが、周波数領域を厳密に表現するためには3次元を必要とする。すなわち、周波数 f の軸と、その成分の実軸と虚軸である。しかし通常、簡単のため周波数領域も2次元表示してある場合が多い。

一般の周期信号の場合には、周期信号は単振動を加え合せたものであるから(3)式の線形性から明らかな様に、各々の単振動のフーリエ変換の和になる。従つて図3の(3)のように fo，2fo，3fo，…… にある角度だけ回転した δ 関数を持つような表示となる。

さて、それでは周期関数でない他の決定的な関数のフーリエ変換を調べてみよう。(4)は短形波状のパルスで、そのフーリエ変換は sinc（シンク）関数と呼ばれている特徴的な形をもったものとなる。このように単発的なパルスではそのフーリエ変換は δ 関数状のピークは持たない。すなわち、いろいろな周波数成分の波の無限個の寄せあつめになっている。そして、ある周波数 $f=f_1$ の成分といったものは実際の物理的意味を持たない。というのはその一点だけではエネルギーが0であるからである。$f_1-\triangle f_1 \leqq f \leqq f_1+\triangle f_1$ の区間で切り出すことにより、そこの面積に対応したエネルギーを持つ成分となるのである。

(5)は(4)を逆に考えたものである。

(6)は一定値で、直流とも解釈でき、（実はこれは周期関数である）そのフーリエ変換は先にも述べたように δ 関数である。直流分（$f=0$）が k だけ存在するということを表示している。(7)はその逆で、インパルスはあらゆる周波数成分を同一量含んでいるという解釈が成り立つ。(8)はインパルス列で、そのフーリエ変換もやはりインパルス列になるところが特徴的である。（これもやはり周期関数である。）(9)は三角波状の信号で、これは sinc 関数の2乗の形をしている。(10)は理想的な正弦波をある一向時間だけ観測した場合の波形で、実際に我々が観測できる信号に対応している。そのフーリエ変換は fo のところにピークは示すが、もはやその形状は δ 関数ではなくなってしまっている。(12)は、そのような実際の切り出しを行うための窓（window）と呼ばれているものの一つであり(11)はその逆である。(13)は後述するように相関関数からパワースペクトルを求めたりする場合によく利用される対である。(14)は正規分布で、そのフーリエ変換も正規分布である。ただし、その分散が逆数となる。

以上に示したように、時系列信号をその周波数的な側面から観察しようとした時に、その時系列信号が決定的であれば、フーリエ変換が極めて有効であることがわかった。これは、周期信号に対してフーリエ級数展開が果した概念を含み、しかも、それを非周期的な L^2 の関数で表わされる関数にまで拡張しているのである。

それは、時間領域⟺周波数領域という一つの相対性を形づくっており、その間ではすべての情報が保たれている。

ところが、決定的な信号に対して極めて有効なこの方法も、統計的に変動する現象を記述しようとすると、このままでは全く利用できなくなってしまうのである。そして、統計的に変動する現象ではあるが、何とかしてその信号を周波数的に捉えたいという考えがパワースペクトル、バイスペクトル、さらに高次のポリスペクトルの概念を生むのである。

参 考 文 献

1) Nobert Wiener, "I am a Mathematician," Doubleday & Company, Inc., 1956.（鎮目恭夫訳, "サイバネティックスはいかにして生まれたか," みすず書房）

2) Laurent Schwartz, "Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques," Editions Scientifiques Hermann, 1961.（吉田耕作、渡辺二郎訳、"物理数学の方法," 岩波書店）

註1) フーリエ変換とその逆変換を定義する記法は種々あり、特に周波数領域に周期の逆数 $f=\frac{1}{T}$ を使うか、それに 2π を乗じた角周波数 $\omega=2\pi f$ を使うかで大きく分れる。しかし、本質は何らかわりがない。この講座では変換にも逆変換にも煩雑な係数の掛からない、しかも物理的に意味のつかみやすい f を利用した記法を採用している。以下に普通使われる2種類の記法を示しておく。

$$\begin{cases} X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \end{cases} \qquad (A1)$$

$$\begin{cases} X(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \end{cases} \qquad (A2)$$

ただし　$j=\sqrt{-1}$

式（A1）は工学関係で良く利用される。理学関係では $\sqrt{-1}$ に j を使わず i を使うが、工学関係では電流が i なので、それをさけて j を利用している。この記法は、積分の e の巾乗の項に 2π がなく t と ω の対称性が良いが、逆変換の係数 $\frac{1}{2\pi}$ が生じるのが欠点である。（A2）は変換と逆変換の両者に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ があり、しかも（A1）と同様 ω と t との対称性も良い。しかし、いつも $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ を考えるのはある意味では煩わしい。