講　座

バイオメカニズム研究者のための バイスペクトル分析の理論と応用（2）

舘　　暲＊

3　不規則信号（random signal）

3.1　アンサンブル（ensemble）

統計的に変動する現象を周波数の概念で捉える前に、統計的に変動する現象を記述する方法について考えてみよう。図4に示すように、ある装置の出力端に時々刻々の電圧を読み取れるような電圧記録計をつなぎ、時々の電圧を記録するとする。ある時にスイッチをONにし、その時から記録を開始するとしよう。その時、例えば次のような三つの場合が想定され、すべて不規則と考えられる。

(I)　観測値は一定せず、その変化の様子が前の値から予測もつかず不規則に変動している。しかし、温度、湿度、気圧といったすべての条件を全く同一にして何回も同一の操作を繰り返した時、全く同一の波形が観測される。（図4(I)）（波の変化の規則がつかめないので不規則信号の取り扱いをするもの。）

(II)　観測値はきれいな正弦波となる。しかし、何回繰り返しても同一の波は現われず、位相がずれたりする。（図4(II)）（波の変化の規則はわかるが再現性に関する法則がつかめないので不規則信号の取り扱いをするもの。）

(III)　一回ごとの波形も不規則であるし、また繰り返しても再現性がない。（図4(III)）

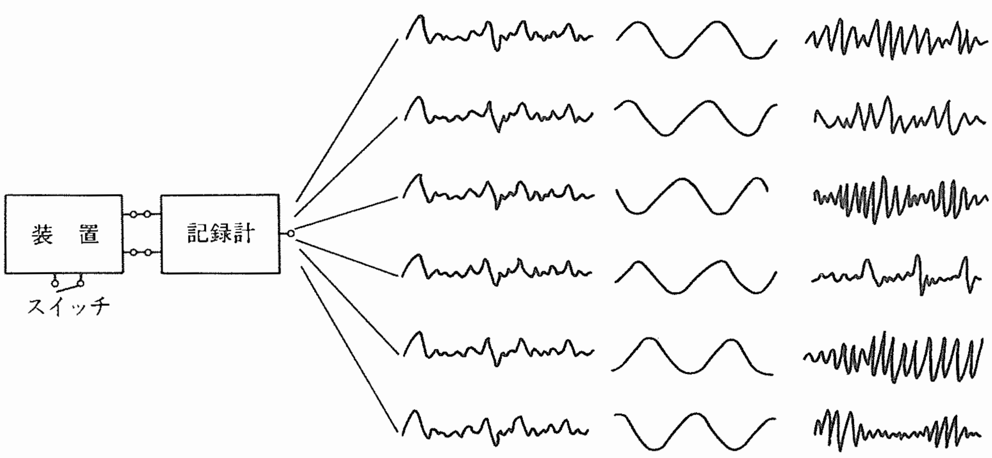

図4　不規則信号の例

このうち(III)の場合が(I)と(II)の二つの意味での不規則性を持っており一般的である。従って、以下では(III)のような意味での不規則信号について考える。

そのような不規則信号を次のような概念で捉えよう。つまり、ある装置が出し得る（実現し得る）可能性のある波全体の集合という

＊　機械技術研究所システム部

ものである。この仮想的な集合をアンサンブルと呼んでいる。そして、一回ごとの試行で観測される波を、このアンサンブルからの一つの出現値と考えるのである。（図５）

このアンサンブルを、以下に示す諸量を以って記述することにより、その不規則な現象を把握することにしよう。その把握の方法はある振幅の値の出現値が、ある時刻にあらわれる確率を、その前後の時刻にあらわれる値との関連から示すことにより不規則過程を記述しようとする統計的な方法である。

時刻 $t=t_1$ を定める。ある観測波形の $t=t_1$

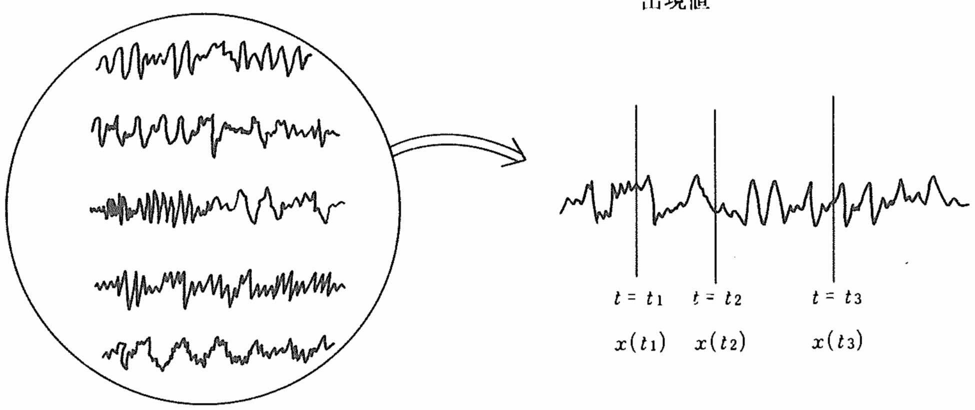

図５　アンサンブルからの出現値

での値を測定し、それを $x(t_1)$ とする。そのような操作をアンサンブルに属するすべての信号について観測を繰り返し行ってデータを得て集合平均する。

$$m_1(t_1)=\mathrm{E}[\,x(t_1)\,] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

これは t_1 の関数であり、その時刻に於けるその過程の平均値にあたる量である。

次に $t=t_1$ と $t=t_2$ での観測値からやはり観測を無限回繰り返して次の量を求める。

$$m_2(t_1,\ t_2)=\mathrm{E}[\,x(t_1)\,x(t_2)\,] \cdots\cdots (8)$$

これは２次の統計量で２次モーメントと呼ばれ時刻 t_1 と t_2 との関数である。

さらに、

$$m_3(t_1,\ t_2,\ t_3)=\mathrm{E}[\,x(t_1)x(t_2)x(t_3)\,] \cdots (9)$$

$$m_4(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)=\mathrm{E}[\,x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)\,] \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

といった、３次、４次、……、n次のモーメントが定まり、それらがすべて決定されればその不規則な現象がすっかり記述されたことになる。

3.2　定常性（stationarity）

(7)式は t_1、(8)式は t_1、t_2、(9)式は t_1、t_2、t_3 の関数といった具合にn次のモーメントはn個の時刻の関数であるが、ごく都合のよい状態として(7)式が時刻 t_1 によらず一定になり、(8)式が t_1 と t_2 の差 $\tau=t_2-t_1$ だけにより、(9)式が $\tau_1=t_2-t_1$、$\tau_2=t_3-t_1$ という差だけにしか影響されない場合がある。このような不規則信号を定常な信号と呼んでいる。通常、我々は取り扱いが簡単になるという意味で定常な信号を考えている場合が多い。（数学的に定常として扱うには、実験している物理的なプロセスが実際にこの仮定を満足しているかどうかを調べることが極めて重要である。）

つまり、

$$m_1=\mathrm{E}[\,x(t)\,] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

$$m_2(\tau)=\mathrm{E}[\,x(t)x(t+\tau)\,] \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

$$m_3(\tau_1,\ \tau_2)=\mathrm{E}[\,x(t)x(t+\tau_1)\,x(t+\tau_2)\,] \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

$$m_4 = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \underset{f}{E}[x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)x(t+\tau_3)] \cdots (14)$$

以上のうち、(11)〜(14)と同様な関係が、すべての次元について成立しているものを強い意味での定常といい、(11)、(12)式を満足するものを（2次の）弱定常、(13)式までを満足するものを3次の定常、………と呼んでいる。

3.3 エルゴード性（ergodicity）

定常な信号という概念を導入して、そのような信号に限定して考えることにより、不規則信号が大分簡単なものになってきた。しかし、まだアンサンブル全体をいつも考えなければいけないのでは大変である。一つの出現値を永い間、詳しく観測すればアンサンブルについての統計的な情報がすべて得られないだろうか。そのような事実が成立している不規則信号（不規則過程）を仮定して、それをエルゴード性を満足する信号という。

以下に示すような時間平均を考える。

$$\mu_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots (15)$$

$$\mu_2(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

$$\mu_3(\tau_1, \tau_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \times x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)\,dt \quad \cdots\cdots (17)$$

$$\mu_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \times x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)x(t+\tau_3)\,dt \quad \cdots\cdots (18)$$

このような量が、アンサンブル平均のそれぞれに対応する諸量に等しい時、その不規則過程はエルゴード性を満足するといっている。

すなわち、そのような仮想的な過程に対しては、

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 = m_1 \\ &\mu_2(\tau) = m_2(\tau) \\ &\mu_3(\tau_1, \tau_2) = m(\tau, \tau) \\ &\mu_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = m_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \end{aligned}\right\} (19)$$

定常性の仮定と同様、このような数学上の仮定を実際の物理的なシステムに適用する場合には、つねにそのシステムについて詳しく調べ、その仮定の妥当性を裏づける必要がある。また、その結果成立しない場合には、始めの定義へと戻って数学的なモデルをたて直す必要があるのは言うまでもない。

以下の論議では、不規則過程は定常でエルゴード性を満足するものとしよう。そのような不規則信号に論議を限定することにより、扱いは極めて楽になるのである。

4. 相関関数とスペクトル

4.1 相関関数（correlation function）

§3で不規則過程はそのモーメントにより記述し得ることを説明した。従って、そのモーメント（1次からn次）を推定することが、取りも直さず我々がその過程について知ることとなる。ただし、モーメントのままでは、例えば2次のモーメントは1次のモーメント（平均値）の影響を被るし、また3次のモーメントは2次と1次のモーメントの影響を受けている。そこで、次のような変形を行ってn次のモーメントが1次から(n−1)次までのモーメントの影響を受けないようにする。

$$\left.\begin{aligned} &s_1(t_1) = m_1(t_1) \\ &s_2(t_1, t_2) = m_2(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_2(t_2) \\ &s_3(t_1, t_2, t_3) = m_3(t_1, t_2, t_3) \\ &\qquad - m_1(t_1)m_2(t\ ,t\ ) \\ &\qquad - m_1(t_2)m_2(t_1, t_3) \\ &\qquad - m_1(t_3)m_2(t_1, t_2) \\ &\qquad + 2m_1(t_1)m_1(t_2)m_1(t_3) \\ &\qquad\quad \vdots \end{aligned}\right\} (20)$$

このようにして得た量sをキュムラント(cumulant)とか半不変量(semi-invariant)とか呼んでいる。[註2)]

そのほかに良く使われる量として、平均の影響だけをとり除いた平均値まわりのモーメントm'がある。

$$m'(t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n)=\mathrm{E}[\{x(t_1)-m_1(t_1)\} \times\{x(t_1)-m(t_2)\}\times\cdots\cdots\times\{x(t_n)-m(t_n)\}] \cdots(21)$$

これとキュムラントとは次のような関係になっている。

$$\left.\begin{aligned}
&s_1(t_1)=m_1'(t_1)\\
&s_2(t_1, t_2)=m_2'(t_1, t_2)\\
&s_3(t_1, t_2, t_3)=m_3'(t_1, t_2, t_3)\\
&s_4(t_1, t_2, t_3, t_4)=m_4'(t_1, t_2, t_3, t_4)\\
&\qquad -m_2'(t_1, t_2)\, m_2'(t_3, t_4)\\
&\qquad -m_2'(t_1, t_3)\, m_2'(t_2, t_4)\\
&\qquad -m_2'(t_1, t_4)\, m_2'(t_2, t_3)\\
&\qquad \vdots
\end{aligned}\right\}(22)$$

不規則過程の記述のために利用するn次の相関関数$\phi_n(t_1, t_2, \cdots\cdots t_n)$としては、$n$次のキュムラントを用いるのが一般的である。しかし、(22)式からわかるように、3次までの相関関数を定義するには、平均値まわりのモーメント$m_n'(t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n)$を用いても同一の結結果となる。

さらに、信号の平均値0と仮定しておけば$m'_n(t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n)=m_n(t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n)$となるので普通のモーメントで3次までの相関関数は定義できることになる。

以下、この講座では簡単な形にして直観的にわかりやすくするために、平均値を

$m_1(t_1)=m_1=0$　（定常性も仮定）

と仮定する。そして、3次までしか扱わないこととして、平均値まわりのモーメントで相関関数を定義する。さらに、信号はエルゴード性も満足するものとする。

すなわち、過程$x(t)$について、

$$m_1=\mathrm{E}[x(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\,dt=0$$

とすれば、その2次の自己相関関数は、

$$\phi_{xx}(\tau)=\mathrm{E}[x(t)x(t+\tau)]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)\,dt\cdots(23)$$

3次の自己相関関数は、

$$\phi_{xxx}(\tau_1, \tau_2)=\mathrm{E}[x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$x(t), y(t)$がともに定常不規則でエルゴード性を満足する平均値0の信号であるとする。この二つの信号に対して相互相関関数を次のように定義する。

$$\phi_{xy}(\tau)=\mathrm{E}[x(t)y(t+\tau)]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y(t+\tau)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\phi_{xxy}(\tau_1\ \tau_2)=\mathrm{E}[x(t)x(t+\tau_1)y(t+\tau_2)]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau_1)$$

$$\times y(t+\tau_2)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

(26)式で定義されるものも含め3次の相互相関関数は、x, yの組み合わせにより全部で6種類存在するが、簡単のため(26)式で代表して扱うことにする。

4.2　スペクトル（spectrum）

もともと不規則に変動している信号も、その相関関数という量に着目することにより、変動しない一定した関数となった。勿論、実際の推定では積分を無限大まではとれないので、ある統計的な変動が残るが、原理的にはアンサンブル平均から求まる相関関数に収束する（従って確定する）わけである。

かくして確定的となった時間信号には、§2で述べた手法をそのまま適用することができるわけで、従って周波数的な取り扱いが可能となる。

相関関数をその有する情報を保存して周波数の領域にフーリエ変換したものをスペクトル密度と呼んでいる。n 次相関関数のフーリエ変換を一般に n 次スペクトル密度と呼ぶ。2次の自己相関関数のフーリエ変換、

$$\Phi_{xx}(f)=\mathrm{F}\{\phi_{xx}(\tau)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-2\pi jf\tau}d\tau \quad \cdots (27)$$

を、自己パワースペクトル密度と呼び、3次の自己相関関数のフーリエ変換、

$$\Phi_{xxx}(f_1,f_2)=\mathrm{F}\{\phi_{xxx}(\tau_1,\tau_2)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xxx}(\tau_1\ \tau_2)e^{-j2\pi(f_1\tau_1+f_2\tau_2)}d\tau_1 d\tau_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

を、自己バイスペクトル密度と呼ぶ。

同様にして相互バイスペクトル密度も(26)式の2次元フーリエ変換として定義される。

$$\Phi_{xxy}(f_1,f_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xxy}(\tau_1,\tau_2)$$

$$\times e^{-j2\pi(f_1\tau_1+f_2\tau_2)}d\tau\, d\tau \cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

註2）厳密には、確率過程（$x_1,\cdots\cdots,x_n$）のモーメント $m_n(x_1,\cdots;x_n)$ と、n 次キュムラント $s_n(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ は、特性関数

$$\theta_n=(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n)=\mathrm{E}[e^{j(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots\alpha_nx_n)}]$$

$$\cdots\cdots\cdots (\mathrm{B}1)$$

を用いて次のように定義される。

$$m_n=(x_1,\cdots\cdots,x_n)$$

$$=\frac{1}{(j)^n}\left[\frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_n}\theta_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\right]_{\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0}$$

$$\cdots\cdots\cdots (\mathrm{B}2)$$

$$s_n=(x_1\cdots\cdots,x_n)$$

$$=\frac{1}{(j)^n}\left[\frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_n}\ell n\,\theta_n(\alpha_1,\cdots;\alpha_n)\right]_{\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0}$$

$$\cdots\cdots\cdots (\mathrm{B}3)$$